МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ. СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Учебно-методическое пособие
для практических занятий в вузах

Составители:
А.П. Карпова,
М.Н. Небольсина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Интерполяция алгебраическими многочленами

1. 1. Постановка задачи интерполяции

Пусть для функции $f: X \longrightarrow R$, $X \subset R$ известны ее значения в (n + 1)-й точках $x_j \in X,\ i = 0, \cdots, n$. Запишем эти значения функции f в табл. 1.1.

Таблица 1.1

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Далее будем считать, что выполнено условие

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b.$$

Задача приближенного вычисления для заданной табл. 1.1 значения функции $f(x)$ при $x \neq x_j,\ i = 0, \cdots, n$ называется **задачей интерполяции** (распространения внутрь).

Решение этой задачи можно найти следующим образом: строится алгебраический многочлен степени не выше n

$$P_n(x;\ x_0,\ x_1, \cdots,\ x_n; f\ ) = P_n(x\ ; f\ ), \tag{1.1}$$

принимающий в точках $x_0,\ x_1, \cdots,\ x_n$ те же значения, что и функция f:

$$f(x_i) = P_n\big(\ x_j; f\ \big),\ i = 0,\ 1, \cdots,\ n \tag{1.2}$$

Интерполяционным многочленом (интерполянтой) для табл. 1.1 называется многочлен (1.1) степени не выше n, удовлетворяющий условию (1.2). Точки $x_0,\ x_1, \cdots,\ x_n$ называются **узлами интерполяции**.

Вычисление значения $f(x)$ при $x \neq x_j,\ i = 0, \cdots, n$ по формуле

$$f(x) \approx P_n(x\ ; f) \tag{1.3}$$

называется **интерполяцией функции f с помощью алгебраического многочлена.**

Замечание 1.1. Если $x \notin [a, b]$, то вычисление $f(x)$ с помощью (1.3) называют **экстраполяцией**.

Теорема 1.1. *Для табл. 1.1 интерполяционный многочлен существует и единственен.*

Для табл. 1.1 с равноотстоящими узлами $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \cdots, n$, $h > 0$ введем в рассмотрение **конечные разности** функции f.

Обозначим $f_k = f(x_k)$, $k = 0, \cdots, n$. Величину.

$$\Delta f(x_k) = \Delta f_k = f(x_k + h) - f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k$$

назовем **конечной разностью первого порядка** функции f в точке $x_k = x_0 + kh$.

Остаточный член первой интерполяционной формулы Ньютона имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ – некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$ и рассматриваемой точкой x.

1.3. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Первая интерполяционная формула Ньютона практически неудобна для интерполирования функции вблизи конца таблицы. В этом случае обычно применяется вторая интерполяционная формула Ньютона.

Пусть имеем систему значений функции $y_i = y(x_i)$ $(i = 0, 1,2, \dots, n)$ для равноотстоящих значений аргумента $x_i = x_0 + ih$.

Построим интерполирующий полином следующего вида:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$
$$+a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1).$$

Или, используя обобщенную степень, получаем

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_{n-1})^{[2]} +$$
$$+a_3(x - x_{n-2})^{[3]} + \cdots + a_n(x - x_1)^{[n]}.$$

Наша задача состоит в определении коэффициентов a_i $(i = 0,1,2, \dots, n)$ полинома $P_n(x)$.

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i} \quad (i = 0,1,2, \dots, n).$$

Подставляя эти значения, получим

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!\,h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$
$$+\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots \tag{1.9}$$
$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)\dots(x - x_1).$$

Это **вторая интерполяционная формула Ньютона.** Введем более удобную запись формулы (1.8). Пусть $q = \frac{x - x_n}{h}$. Получим

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Это и есть обычный вид **второй интерполяционной формулы Ньютона.**

Остаточный член второй интерполяционной формулы Ньютона имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ – некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n$ и рассматриваемой точкой x.

Замечание. 1.3. Как первая, так и вторая, обе интерполяционные формулы Ньютона могут быть использованы для экстраполирования функции, т.е. нахождения значений функции y для значений аргументов x, лежащих вне пределов таблицы. Если $x < x_0$ и x близко к x_0, то применяют первую интерполяционную формулу Ньютона, причем тогда $q = \frac{x-x_0}{h} < 0$. Если $x > x_n$ и x близко к x_n, то применяют вторую интерполяционную формулу Ньютона, причем тогда $q = \frac{x-x_n}{h} > 0$.

1.4. Центральные разности

При построении интерполяционных формул Ньютона используются лишь значения функции, лежащие по одну сторону от выбранного начального значения, т.е. эти формулы носят односторонний характер.

Введем понятие центральных разностей. Это разности, расположенные в горизонтальной строке диагональной таблицы разностей данной функции, соответствующей начальным значениям x_0 и y_0, или в строках, непосредственно примыкающих к ней. Это разности Δy_{-1}, Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$, … в табл. 1.3.

Таблица 1.3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
	y_{-4}						
x_{-4}		Δy_{-4}					
	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$				
x_{-3}		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$			
	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
x_{-2}		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
x_{-1}		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
x_0		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$
x_1		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
x_2		Δy_2		$\Delta^3 y_1$			
	y_3		$\Delta^2 y_2$				
x_3		Δy_3					
	y_4						

1.5. Интерполяционные формулы Гаусса

Пусть имеется $2n+1$ равноотстоящих узлов интерполирования

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const \quad (i = -n, -(n-1), \cdots, n-1)$,
и для функции $y = f(x)$ известны ее значения в этих узлах

$$y_i = f(x_i) \qquad (i = 0, \pm 1, \cdots, \pm n).$$

Требуется построить полином $P(x)$ степени не выше $2n$ такой, что

$$P(x_i) = y_i \text{ при } i = 0, \pm 1, \cdots, \pm n.$$

Будем искать этот полином в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + a_3(x - x_{-1})^{[3]} +$$
$$+ \cdots + a_{2n-1}\left(x - x_{-(n-1)}\right)^{[2n-1]} + a_{2n}\left(x - x_{-(n-1)}\right)^{[2n]}.$$

Применяя для вычисления коэффициентов a_i $(i = 0, 1, \cdots, 2n)$ тот же способ, что и при выводе интерполяционных формул Ньютона, и учитывая формулу $\Delta^k P(x_i) = \Delta^k y_i$, последовательно находим:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!\, h}, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\, h^2}, \quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!\, h^3},$$
$$a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!\, h^4}, \cdots, \quad a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n-1)!\, h^{2n-1}}, \quad a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!\, h^{2n}}.$$

Далее, введя переменную $q = \frac{x - x_0}{h}$ и сделав замену, получим первую интерполяционную формулу Гаусса

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$
$$+ \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}. \qquad (1.9)$$

Первая интерполяционная формула Гаусса содержит центральные разности

$$\Delta y_0, \ \Delta^2 y_{-1}, \ \Delta^3 y_{-1}, \ \Delta^4 y_{-2}, \ \Delta^5 y_{-2}, \ \Delta^6 y_{-3}, \ \cdots$$

Аналогично можно получить вторую интерполяционную формулу Гаусса

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} +$$
$$+ \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \frac{(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} +$$
$$+ \frac{(q+n)(q+n-1)\cdots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \qquad (1.10)$$

в которую входят центральные разности

$$\Delta y_{-1}, \ \Delta^2 y_{-1}, \ \Delta^3 y_{-2}, \ \Delta^4 y_{-2}, \ \Delta^5 y_{-3}, \ \Delta^6 y_{-3}, \ \cdots$$

1.6. Интерполяционная формула Стирлинга

Взяв среднее арифметическое первой и второй интерполяционных формул Гаусса, получим формулу Стирлинга

$$P(x) = y_0 + q \cdot \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2 - 1^2)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} +$$
$$+ \frac{q^2(q^2 - 1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{q(q^2 - 1^2)(q^2 - 2^2)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} +$$