

С. В. Хабиров, Ю. А. Чиркунов

ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИЙНОГО АНАЛИЗА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

МОНОГРАФИЯ

НОВОСИБИРСК
2012

УДК 517.91+539.3

Ч-651

Рецензенты:

Академик РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор *Б.Д. Аннин*;
член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор *В.В. Пухначев*

Чиркунов Ю.А.

Ч-651 Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды : монография / Ю.А. Чиркунов, С.В. Хабилов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. – 659 с. (Серия «Монографии НГТУ»)

ISBN 978-5-7782-1896-3

Монография посвящена развитию методов симметричного (группового) анализа дифференциальных уравнений и их применению к исследованию уравнений механики сплошной среды. С помощью метода А-операторов найдены новые законы сохранения для уравнений газовой динамики. Приведен новый алгоритм групповой классификации системы дифференциальных уравнений; его эффективность и преимущества показаны на примерах уравнений газовой динамики и уравнений нелинейных продольных колебаний вязкоупругого стержня в модели Кельвина. Выполнена групповая классификация систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями двух переменных. Решена проблема x -автономности и линейной автономности основной алгебры Ли системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка; результаты для x -автономности переносятся на квазилинейную систему. Получены структурные теоремы о контактных и точечных преобразованиях, о законах сохранения для квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Исследованы обладающие максимальной симметрией обобщенное уравнение Дарбу и уравнение Овсянникова, описывающие установившиеся колебания в непрерывно-неоднородных средах. Проведен симметричный анализ уравнений Ламе классической динамической и статической теории упругости, уравнения, описывающего нелинейные продольные колебания вязкоупругого стержня в модели Кельвина, уравнений движения несжимаемой вязкой теплопроводной жидкости с согласованными аномальными зависимостями коэффициента вязкости и коэффициента удельной теплоемкости от температуры. Найдены все эволюционные симметрические t -гиперболические по Фридрихсу системы, равносильные системам двумерных и трехмерных волновых уравнений. Получены новые подмодели газовой динамики: инвариантные, частично инвариантные, дифференциально-инвариантные; исследован их физический смысл.

Монография предназначена математикам, механикам и физикам, интересующимся вопросами симметричного анализа уравнений механики сплошной среды.

УДК 517.91+539.3

ISBN 978-5-7782-1896-3

© Чиркунов Ю.А., Хабилов С.В., 2012

© Новосибирский государственный
технический университет, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава 1. Введение в групповой анализ дифференциальных уравнений.....	11
§ 1.1. Однопараметрическая локальная группа и касательный вектор.....	11
§ 1.2. Инварианты и инвариантные многообразия	20
§ 1.3. Теория продолжения	27
§ 1.4. Задача групповой классификации.....	47
§ 1.5. Алгебра Ли операторов.....	61
§ 1.6. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих группу	74
§ 1.7. Группы Ли преобразований.....	100
§ 1.8. Инвариантные решения и инвариантные подмодели.....	109
§ 1.9. Оптимальная система подалгебр.....	121
§ 1.10. Частично инвариантные подмодели	140
§ 1.11. Дифференциально-инвариантные подмодели.....	148
§ 1.12. Метод А-операторов.....	161
§ 1.13. Новый алгоритм групповой классификации	164
Глава 2. Групповая классификация систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями двух переменных	183
§ 2.1. Постановка задачи	183
§ 2.2. Групповая классификация гиперболических систем	185
§ 2.3. Групповая классификация параболических систем	191
§ 2.4. Групповая классификация эллиптических систем	193
§ 2.5. Групповая классификация эллиптических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными	196

Глава 3. Линейной автономность основной алгебры Ли системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.....	199
§ 3.1. Определяющие уравнения и преобразования эквивалентности.....	200
§ 3.2. Условия x -автономности основной алгебры Ли.....	202
§ 3.3. Свойство второй координаты операторов, допускаемых системой линейных уравнений.....	237
Глава 4. Групповые свойства и законы сохранения квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка	257
§ 4.1. Контактные преобразования, допускаемые квазилинейными дифференциальными уравнениями второго порядка.....	257
§ 4.2. Точечные преобразования, допускаемые слабонелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка.....	261
§ 4.3. Законы сохранения первого порядка для слабонелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.....	263
§ 4.4. Законы сохранения первого порядка для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.....	265
§ 4.5. Классификация по законам сохранения первого порядка линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными	267
Глава 5. Установившиеся колебания в непрерывно-неоднородной среде, обладающие максимальной симметрией	277
§ 5.1. Групповое свойство обобщенного уравнения Дарбу	277
§ 5.2. Однопараметрические семейства уравнений	280
§ 5.3. Исследование методами группового анализа краевых задач для эллиптического обобщенного уравнения Дарбу.....	285
§ 5.4. Исследование методами группового анализа краевых задач для уравнения Овсянникова	300
Глава 6. Групповой анализ уравнений Ламе классической динамической теории упругости.....	315
§ 6.1. Групповое расслоение уравнений Ламе	316
§ 6.2. Система (RL)	317
§ 6.3. Групповое свойство системы (RL)	322
§ 6.4. Классификация частично инвариантных решений системы (RL) и уравнений Ламе	323

§ 6.5. Теорема о разложении инвариантных решений системы (RL)	345
§ 6.6. Теорема о разложении инвариантных решений уравнений Ламе.....	348
§ 6.7. Примеры частично инвариантных решений	351
§ 6.8. Дифференциальные связи.....	354
§ 6.9. Системы Фридрихса, равносильные системам волновых уравнений.....	355
§ 6.10. Волны сдвига в трехмерной упругой среде.....	364
Глава 7. Групповой анализ уравнений Ламе классической статической теории упругости.....	373
§ 7.1. Групповое расслоение.....	374
§ 7.2. Решение автоморфной системы	375
§ 7.3. Групповое свойство разрешающей системы.....	378
§ 7.4. Преобразования Кельвина	380
§ 7.5. Комплексные переменные	381
§ 7.6. Двойные волны сдвига системы (RLS)	402
Глава 8. Групповой анализ нелинейных вязкоупругих одномерных моделей Кельвина	405
§ 8.1. Групповая классификация	405
§ 8.2. Инвариантные решения	407
Глава 9. Симметричный анализ модели несжимаемой жидкости с вязкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры	419
§ 9.1. Групповое свойство	420
§ 9.2. Группа внутренних автоморфизмов	430
§ 9.3. Оптимальная система.....	431
§ 9.4. Подалгебры малых размерностей бесконечной алгебры	439
§ 9.5. Подмодели ранга 3.....	452
§ 9.6. Подмодели ранга 2.....	458
§ 9.7. Одномерные движения термовязкой жидкости.....	463
Глава 10. Законы сохранения и групповые свойства уравнений газовой динамики	469
§ 10.1. Законы сохранения и групповые свойства уравнений движения газа.....	469

§ 10.2. Законы сохранения и групповые свойства уравнений газовой динамики с нулевой скоростью звука	485
§ 10.3. Законы сохранения и групповые свойства уравнений изотропического движения газа	492
§ 10.4. Нелокальные законы сохранения для уравнений установившегося безвихревого изотропического плоскопараллельного движения газа.....	508
Глава 11. Подмодели уравнений газовой динамики.....	523
§ 11.1. Групповая классификация уравнений газовой динамики и разложение основных алгебр	524
§ 11.2. Разложение основных алгебр и компактное представление оптимальной системы	528
§ 11.3. Инвариантные подмодели ранга 3	546
§ 11.4. Инвариантные решения ранга 1	556
§ 11.5. Автономные подмодели ранга 1	577
§ 11.6. Неавтономные подмодели ранга 1	597
§ 11.7. О классификация дифференциально-инвариантных подмоделей.....	614
Библиографический список	643