

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет  
им. П.Г. Демидова

С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов

Локальные методы анализа  
динамических систем

*Учебное пособие*

*Рекомендовано  
Научно-методическим советом университета  
для студентов специальностей Математика и  
Прикладная математика и информатика*

ЯРОСЛАВЛЬ 2006

УДК 517.925+517.928

ББК В162я73

Г 52

*Рекомендовано*

*Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2006 года*

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Н.Х. Розов;  
кафедра математики физического факультета Московского  
государственного университета им. М.В. Ломоносова

**Глызин, С.Д.** Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов;

Г 52 Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 92 с.

ISBN 5-8397-0509-8 (978-5-8397-0509-8)

Изложена теория нормальных форм в приложении к динамическим системам с конечномерным и бесконечномерным фазовым пространством. Приводится эффективный алгоритм вычисления коэффициентов нормальной формы.

Учебное пособие по дисциплине „Численные методы анализа динамических систем“ (блок ДС) предназначено студентам специальностей 010100 Математика и 010200 Прикладная математика и информатика очной формы обучения.

Рис. 21. Библиогр.: 32 назв. Табл. 4

УДК 517.925+517.928

ББК В161.61.я73

ISBN 5-8397-0509-8

(978-5-8397-0509-8)

© Ярославский  
государственный университет  
им. П.Г. Демидова, 2006

© Глызин С.Д.,  
Колесов А.Ю., 2006

# Оглавление

<b>Введение . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>1 Алгоритмы нормализации систем ОДУ . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	7
1.2 Нормализация Пуанкаре-Дюлака . . . . .	7
1.3 Теорема о центральном многообразии . . . . .	10
1.4 Описание основного алгоритма . . . . .	11
1.5 Структура нормальной формы в простейших случаях . . . . .	14
1.5.1 Транскритическая и виллообразная бифуркации . . . . .	15
1.5.2 Бифуркация Андронова-Хопфа . . . . .	17
1.5.3 Обзор бифуркаций коразмерности два . . . . .	22
1.6 Резонанс 1:1 . . . . .	28
1.6.1 Динамические свойства нормальной формы . . . . .	29
1.6.2 Обоснование некоторых результатов . . . . .	35
1.7 Резонанс 1:2 . . . . .	39
1.7.1 Нормальная форма в случае малости квадратичной нелинейности . . . . .	40
1.7.2 Нормальная форма в случае, если квадратичная нелинейность зависит от $\sqrt{\epsilon}$ . . . . .	42
1.7.3 Нормальная форма в случае произвольной квадратичной нелинейности . . . . .	43
<b>2 Алгоритмы нормализации отображений . . . . .</b>	<b>45</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	45
2.2 Нормализация отображений . . . . .	45
2.3 Отображение, моделирующего динамику взаимодействия трех автогенераторов . . . . .	47
2.3.1 Постановка задачи . . . . .	47
2.3.2 Нормальная форма отображения . . . . .	47

2.3.3	Динамические свойства нормальной формы отображения . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Нормализация дифференциально-разностных уравнений</b>	<b>59</b>
3.1	Постановка задачи . . . . .	59
3.2	Алгоритмы построения нормальной формы дифференциальных уравнений с запаздыванием . . . . .	60
3.2.1	Описание основного алгоритма . . . . .	60
3.3	Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона . . . . .	65
3.3.1	Постановка задачи . . . . .	65
3.3.2	Локальный анализ . . . . .	66
3.4	Резонанс 1:2 в уравнении второго порядка с периодически возмущенным запаздыванием . . . . .	76
	<b>Литература</b> . . . . .	<b>86</b>
	<b>Приложение</b> . . . . .	<b>89</b>

# Введение

В конце 19 – начале 20 века А.Пуанкаре поставил задачу качественного анализа дифференциальных уравнений. Успехи современных математических теорий, касающихся исследования поведения нелинейных динамических систем, так или иначе связаны с решением именно этой задачи.

В ряду инструментов, разработанных для качественного анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений, важное место занимает метод нормальных форм. Идея метода была высказана Пуанкаре в его диссертации и состояла в нахождении такого класса автономных динамических систем, которые можно было бы с помощью специальных замен свести к линейным. На этом пути было введено понятие резонансности собственных чисел матрицы линейной части системы и доказано, что в случае отсутствия таких резонансов сведение возможно. Позднее Дюлак выполнил обобщение этого результата на резонансный случай и показал, что в этой ситуации простейшим видом преобразованной системы является выражение, содержащее в правой части, наряду с линейными слагаемыми, еще и не уничтожаемые заменами резонансные члены. Такую систему называют нормальной формой, и ее построение позволяет успешно проанализировать локальную динамику изучаемой системы.

Однако по-настоящему действенным метод нормальных форм стал после работ, принадлежащих Н.М. Крылову, Н.Н. Боголюбову и Ю.А. Митропольскому [1–3], в которых разрабатывались асимптотические методы нелинейных колебаний. Нормализация динамической системы на устойчивом интегральном многообразии позволяет выделить систему малой размерности, отвечающую за локальные свойства исходной системы. В настоящее время методу нормальных форм посвящено большое число различных исследований, сошлемся здесь лишь на самые, на наш взгляд, заметные, вышедшие в последние годы [4–11].

Сказанное делает актуальной разработку по возможности более экономного алгоритма построения нормальной формы. Заметим, что наиболее интересные выводы о качественном поведении получаются при изменении

параметров динамической системы в окрестности критических значений, в этом случае величина надкритичности служит естественным малым параметром, по которому удобно строить асимптотические формулы устойчивых решений изучаемой задачи. В то же время нормальная форма строится именно при критических значениях параметров, поэтому впоследствии возникает задача такого масштабирования возмущенной нормальной формы, чтобы полученная система могла быть удобно проанализирована, например, численными методами.

В пособии предлагается алгоритм, в ходе выполнения которого укороченная нормальная форма возникает из условий разрешимости для одного из очередных слагаемых нормирующей замены, при этом она уже оказывается подходящим образом масштабированной по входящим переменным.