

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

**М.Ф. МЕХТИЕВ, Н.К. АХМЕДОВ, П.М. САДЫКОВ**

## АНАЛИЗ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА

*Решена задача кручения радиально-слоистого цилиндра, состоящего из чередующихся жестких и мягких слоев. Соответствующие им элементарные решения могут проникать достаточно глубоко и существенно менять картину напряженно-деформированного состояния вдали от торцов. Это приводит фактически к нарушению принципа Сен-Венана в его классической формулировке.*

**Ключевые слова:** радиально-слоистый цилиндр, погранслой, спектр оператора.

**Введение.** Радиально-слоистые оболочки имеют широкое применение в различных областях машиностроения. Одним из важных обстоятельств расчета таких элементов является наличие приближенных инженерных теорий. Этим обусловлено большое количество работ, посвященных этой теме, и определяется актуальность настоящего исследования. Следует отметить два подхода при построении прикладных теорий. Первый связан с введением некоторых гипотез относительно напряженно-деформированного состояния цилиндра, второй основан на асимптотическом подходе, применяемом к трехмерным уравнениям теории упругости.

В настоящей работе в рамках второго подхода решается задача кручения радиально-слоистых цилиндров и показано, что в случае чередования жестких и мягких слоев существуют слабо затухающие погранслойные решения. Соответствующие им элементарные решения могут проникать достаточно глубоко и существенно менять картину напряженно-деформированного состояния вдали от торцов. Это приводит фактически к нарушению принципа Сен-Венана в его классической формулировке.

**Решение задачи.** 1. Рассмотрим задачу кручения кругового радиально-слоистого цилиндра, состоящего из чередующихся жестких и мягких слоев числом  $n = 2r - 1$ . Будем считать, что внутренний и внешний слои - жесткие. Каждый жесткий слой снабдим нечетным номером  $j = 1, 3, \dots, n$ , а мягкий - четным  $i = 2, 4, \dots, n - 1$  (порядок нумерации от центра цилиндра). Для простоты предположим, что упругие свойства всех жестких и всех мягких слоев одинаковы. Модули сдвига  $G_j = G_{ж}$ ,  $G_i = G_{м}$ . Внутренний и внешний радиусы  $k$ -го слоя обозначим  $r_{0k}$  и  $r_{1k}$  соответственно. Пусть цилиндр занимает объем  $\Gamma = \{r \in [r_{01}; r_{1n}], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [-L; L]\}$ . За относительную характеристику жесткости примем малый параметр

$$p = \frac{G_{м}}{G_{ж}}.$$

Уравнение равновесия  $k$ -го слоя в перемещениях имеет вид [1]:

$$\Delta u_{\varphi}^{(k)} - \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi}^{(k)} = 0, \quad (1)$$

где  $u_{\varphi}^{(k)} = u_{\varphi}^{(k)}(\rho, \xi)$  - компонента вектора смещений  $k$ -го слоя;  $\rho = \frac{r}{r_{1n}}$ ,  $\xi = \frac{z}{r_{1n}}$  - новые

безразмерные координаты;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ .