

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ
НЕОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ
УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ.
ЗАДАЧА
О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ
В ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ С ВКЛЮЧЕНИЕМ**

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
2. Общая постановка упруго-пластических задач Определяющие соотношения, граничные условия, условия сопряжения теории упруго-пластического тела	5
3. Определяющие соотношения теории идеальной пластичности. Линеаризованные соотношения	7
4. Решение упруго-пластической задачи о пластине, содержащей включение	7
4.1. Нулевое приближение	10
4.2. Первое приближение	14
5. Библиографический список	25

6.2. Граничные условия на части поверхности тела, где заданы перемещения u_i^* , имеют вид:

$$u_i = u_i^*. \quad (2.8)$$

6.3. На границе раздела упругой и пластических областей требуется задать условия сопряжения:

$$[\sigma_{ij}n_j] = 0, \quad [u_i] = 0. \quad (2.9)$$

Здесь и далее знак $[]$ будет означать скачок соответствующей величины, т.е. разность значений представленных в скобках выражений, соответствующих упругой и пластической областям. Как обычно, по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3, если не оговорено противное. Нижний индекс, стоящий после запятой, указывает на дифференцирование по координате, соответствующей этому индексу.

Уравнения (2.1)—(2.9) представляют замкнутую систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние упруго-пластического тела.

В цилиндрической системе координат уравнение равновесия в напряжениях (при отсутствии внешних массовых сил) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где σ_ρ , σ_θ , σ_z , $\tau_{\rho\theta}$, $\tau_{\rho z}$, $\tau_{\theta z}$ — компоненты тензора напряжений.

Соотношения Коши, связывающие компоненты тензора деформаций e_ρ , e_θ , e_z , $e_{\rho\theta}$, $e_{\rho z}$, $e_{\theta z}$ и вектора перемещений u_ρ , u_θ , u_z , $u_{\rho\theta}$, $u_{\rho z}$, $u_{\theta z}$ в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], \quad e_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \\ e_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Соотношения закона Гука, отражающие связь между напряжениями и упругими деформациями (в случае несжимаемого материала) для цилиндрической системы координат

$$\begin{aligned} S_\rho &= 2Ge_\rho^e, \quad S_\theta = 2Ge_\theta^e, \quad S_z = 2Ge_z^e, \\ S_{\rho\theta} &= 2Ge_{\rho\theta}^e, \quad S_{\theta z} = 2Ge_{\theta z}^e, \quad S_{\rho z} = 2Ge_{\rho z}^e, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где G — модуль сдвига, S_ρ , S_θ , S_z , $S_{\rho\theta}$, $S_{\rho z}$, $S_{\theta z}$ — девиатор тензора напряжений, e_ρ^e , e_θ^e , e_z^e , $e_{\rho\theta}^e$, $e_{\rho z}^e$, $e_{\theta z}^e$ — компоненты тензора деформаций.

3. Определяющие соотношения теории идеальной пластичности. Линеаризованные соотношения

При решении задач методом малого параметра все функции раскладываются в ряды по степени малого параметра δ [6]:

$$\{\sigma_{ij}, e_{ij}^p, e_{ij}^e, \lambda, \dots\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \{\sigma_{ij}^{(n)}, e_{ij}^{p(n)}, e_{ij}^{e(n)}, \lambda^{(n)}, \dots\}, \quad (\delta \ll 1). \quad (3.1)$$

Например,

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(1)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots$$

Величинами n -го порядка, здесь и ниже, называются выражения, отмеченные вверх индексом (n) .

Процедуру разложения всех исходных функций по параметру δ будем называть линеаризацией функций.

$$F(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n F(r)^{(n)}, \quad (\delta \ll 1), \quad \text{где } F(r) \text{ — некая функция, зависящая от параметра } r.$$

Термин «линеаризация», отражает то, что при $n \geq 1$ $F^{(n)}$ представляют собой линейные функции величин n -го порядка, а при $n = 0$ функция $F^{(0)}$ обычно нелинейная.

Дальнейшее рассмотрение будем проводить в цилиндрической системе координат r, θ, z , ограничимся при этом плосконапряженным случаем. Плосконапряженное состояние реализуется в тонких плоских пластинах, нагруженных в своей плоскости. В этом случае частицы деформируемого тела перемещаются вдоль плоскости, перпендикулярной оси z , и не зависят от координаты z : $\sigma_z = \tau_{\rho z} = \tau_{\theta z} = e_{\rho z} = e_{\theta z} = 0$.

4. Решение упруго-пластической задачи о пластине, содержащей включение

Исследуем задачи о двухосном растяжении тонкой пластины с отверстием в форме эллипса и о тонкой пластине с отверстием в форме эллипса, в которое с натягом вставлено упругое включение — круглое кольцо. Материал пластины предполагается идеально упруго-пластическим, включение предполагается упругим. Рисунок 1а — без включения, рисунок 1б — с включением.

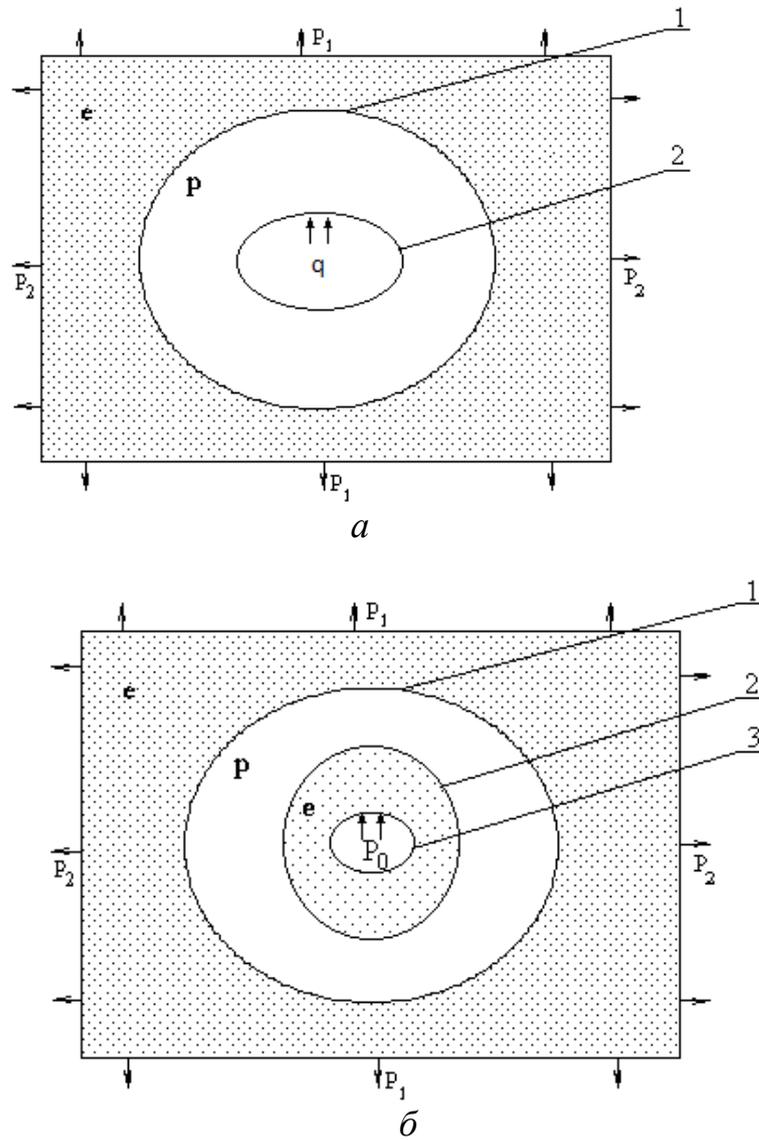


Рис. 1

На рисунке 1а обозначено: 1 — граница раздела упругой и пластических областей пластины, 2 — внутренний контур пластины. На рисунке 1б обозначено: 1 — граница раздела упругой и пластических областей пластины, 2 — граница контакта включения и пластины, 3 — внутренний контур включения. Внутренний и внешний контуры включения имеют эллиптическую форму. Пластины на бесконечности растягиваются взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями P_1 и P_2 , внутренний контур включения нагружен нормальным давлением P_0 .

Рассматривается случай плосконапряженного состояния, т.е. полагается $\sigma_z = \tau_{\rho z} = \tau_{\theta z} = e_{\rho z} = e_{\theta z} = 0$. Для решения задачи введем цилиндрическую систему координат ρ, θ, z . Ось $0z$ направлена вдоль оси круглого кольца, а начало координат выбираем в центре последнего.

При этом материал конструкции считается не сжимаемым, однородным, изотропным, но, как отмечалось выше, материалы пластины и вклю-

чения предполагаются различными. При построении математической модели будем исходить из предположения, что пластическая зона в пластине полностью охватывает контур отверстия.

Пусть пластическое состояние в пластине соответствует стороне ВС условия пластичности Треска — Сан-Венана (рис. 2).

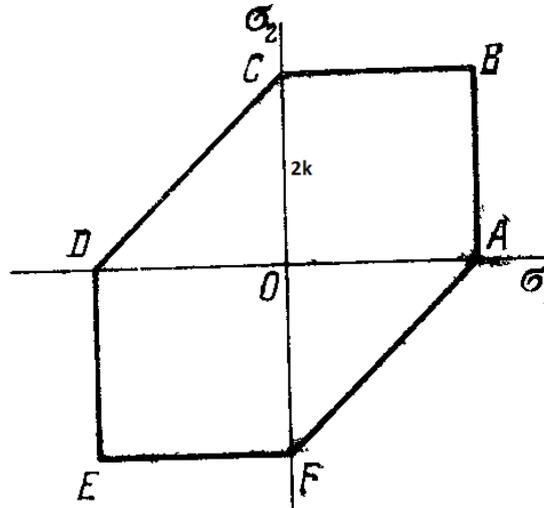


Рис. 2

Задача будет решена после нахождения распределения поля напряжений (компонент тензора напряжений $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$) и перемещений (компонент вектора перемещений u_ρ, u_θ) во всей составной конструкции, а также формы упруго-пластической границы в пластине.

Для решения поставленной задачи удобно применить приближенно-аналитический метод — метод малого параметра или более широко — метод возмущений, смысл которого раскрывался выше. Известно [6], что применение этого метода позволяет получить приближенное решение вблизи уже известного точного решения. Для рассматриваемой задачи с эллиптическими контурами, такой близкой задачей будет задача о пластине с круговыми контурами, представляющая нулевое приближение или невозмущенное состояние в искомом решении. В соответствии со сказанным, ограничившись нулевым и первым приближениями, решение общей задачи будет искаться в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho &= \sigma_\rho^0 + \delta\sigma_\rho^1; & \sigma_\theta &= \sigma_\theta^0 + \delta\sigma_\theta^1; \\
 \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\theta}^0 + \delta\tau_{\rho\theta}^1; & \sigma_z &= \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta); \\
 u &= u^0 + \delta u^1; & v &= v^0 + \delta v^1; & \rho_k &= R_0 + \delta R_1, \\
 r_s &= 1 + \delta r_s^{(1)},
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

где верхний индекс 1 указывает на первое приближение, а индекс 0 на нулевое приближение, δ — малый параметр, $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z$ — компоненты тензора напряжений; v — перемещения вдоль осей соответственно; r_s — радиус

упруго-пластической границы в пластины, ρ_k — линия контакта включения и пластины.

Рассмотрим отдельно нулевое и первое приближения.

4.1. Нулевое приближение (упруго-пластическое состояние тонкой пластины с круговым отверстием и упруго-пластическое состояние тонкой пластины с круговым отверстием, заполненным с натягом круглым включением — цилиндром)

Рассмотрим осесимметричное состояние тонкой пластины с круговым отверстием радиуса α для первой задачи (рис. 3а) и осесимметричное состояние тонкой пластины с круговым отверстием радиуса α , содержащим с натягом круглое кольцо с внешним радиусом α_1 и внутренним β для второй задачи (рис. 3б).

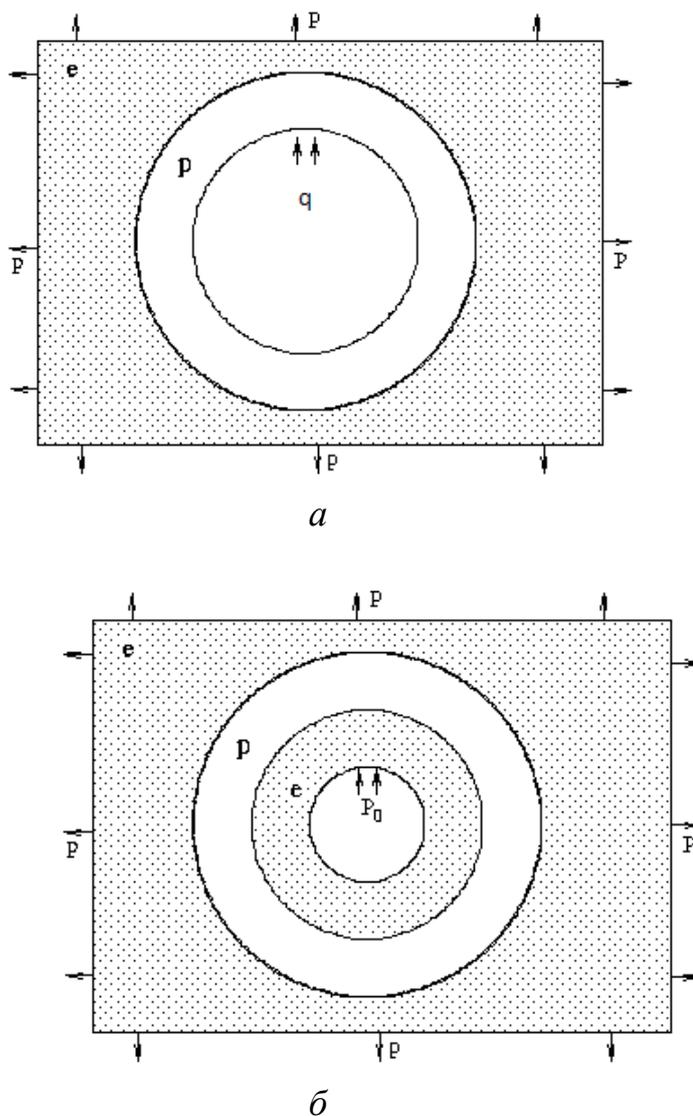


Рис. 3