

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЭЛЕМЕНТЫ
СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
В ЗАДАЧЕ УПРУГОСТИ
СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Учебно-методическое пособие

Составители:
О.И. Иванищева
Ю.Н. Прибытков

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
§ 1. Элементы статистического моделирования в среде Mathcad	5
1.1. Функции Mathcad для вероятностных распределений и генерации случайных чисел	5
1.2. Моделирование псевдослучайных процессов	11
1.3. Вычисление интеграла методом статистического моделирования	13
§ 2. Моделирование напряженного состояния упругого тела при описании модулей упругости с помощью случайных функций	14
2.1 Имитационное моделирование в стохастической центрально-симметричной задаче	14
2.2 Напряженное состояние стохастически неоднородного упругого полого шара	15
§ 3. Лабораторные работы	17
3.1. Исследование математического ожидания компонент напряжений полого шара из стохастического композита	17
3.2. Построение алгоритма оценки дисперсии компонент напряженного состояния полого шара из стохастического композита	19
3.3. Исследование зависимости дисперсии компонент напряженного состояния от параметров системы	19
Литература	20

2) $dunif(x, a, b)$, $a \leq x \leq b$ — **равномерное распределение**.

Распределение полезно при описании переменных, у которых каждое значение равновероятно. Плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x < a \text{ и } x > b. \end{cases}$$

3) $dexp(x, r)$, $r > 0$ — **экспоненциальное или показательное распределение**.

Плотность распределения

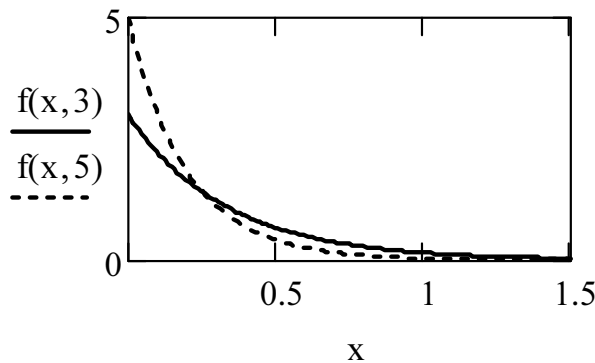
$$f(x) = r \exp(-rx), \quad r > 0,$$

функция распределения

$$F(x) = 1 - \exp(-rx),$$

математическое ожидание и дисперсия $m_y = \sigma_y = \frac{1}{r}$.

На листинге 2 представлен пример работы функции $dexp(x, r)$, $r > 0$,



`x := 0, 0.01 .. 1.5`
`r := 5`
`f(x, r) := dexp(x, r):`

Листинг 2: График плотности распределения экспоненциального закона

4) $dchisq(x, n)$, $n \in Z_+$ — χ^2 -распределение (хи-квадрат). Параметр n — число степеней свободы или число случайных величин с нормальным распределением, используемых для построения величины χ .

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — совместно независимые стандартные нормальные

случайные величины $\xi_i \in (0, 1)$. Тогда случайная величина $x = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ имеет

χ^2 -распределение с n степенями свободы.

Плотность распределения имеет вид

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp(-n/2), \quad x > 0, \quad n \geq 1.$$

Здесь $\Gamma(n/2)$ — гамма-функция;

5) $dF(x, n, m)$ — **распределение Фишера (F-распределение)**. Параметры $n, m \in Z_+$ — числа степеней свободы.

Двухпараметрическое семейство абсолютно непрерывных распределений с плотностью

$$f_{m,n} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) x^{\frac{m+n}{2}}},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция;

6) $dt(x, n)$ — **распределение Стьюдента (t-распределение) с n степенями свободы**.

Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Рас-

пределение Стьюдента имеет случайная величина $t(n) = \xi_0 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$,

равная отношению стандартной нормальной случайной величины к корню квадратному из случайной величины, имеющей χ^2 -распределение, деленной на число ее степеней свободы n .

Плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Здесь $\Gamma(u)$ — гамма-функция;

7) $dlnorm(x, \mu, \sigma)$ — **логарифмическое нормальное распределение**. Параметры те же, что у нормального распределения. Это распределение можно получить из нормального с помощью замены $x \rightarrow \ln(x)$ и соответствующей перенормировки.

Плотность логнормального распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot x},$$

8) $dcauchy(x, l, s)$ — **распределение Коши**.

Плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\pi l \left(1 + \frac{(y-s)^2}{l^2} \right)},$$

функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{x-s}{l}\right) + \frac{1}{2},$$

мода и медиана $\text{mod}_x = \text{med}_x = s$,

9) $dlogis(x, l, s)$ — **логистическое распределение**. Параметры в распределениях Коши и логистическом: $l(\text{location})$ параметр расположения, а $s(\text{scale})$, $s > 0$ — параметр масштаба.

Плотность распределения

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-l}{s}\right)}{2s} \left(1 + \exp\left(-\frac{x-l}{s}\right) \right)^{-2}.$$

10) $dbeta(x, s, p)$ — **бета-распределение**. Определено на отрезке $[0, 1]$, s, p — параметры формы ($s, p > 0$).

Функция распределения

$$F(x) = \int_0^x t^{s-1} (1-t)^{p-1} dt.$$

При $n \rightarrow \infty$ бета-распределение сходится к гамма-распределению.

11) $dgamma(x, s)$ — **стандартное гамма-распределение** ($x > 0$), $s > 0$ — параметр формы).

Плотность стандартного гамма-распределения получается из

$$f(x, s, b, c) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot (x-c)^{s-1} b^{-s} \exp\left(-\frac{x-c}{b}\right), & x \geq c, \\ 0, & x < c. \end{cases}$$

при $b = 1$ и $c = 0$.

12) $dweibull(x, s)$ — **распределение Вейбулла** ($(x > 0)$, $s > 0$ — параметр формы).

Плотность распределения Вейбулла описывается формулой

$$f(x) = \begin{cases} (k/\lambda)(x/\lambda)^{(k-1)} \exp\left(-(x/\lambda)^k\right), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$