О высшихъ и низшихъ предѣлахъ вещественныхъ корней алгебраическихъ уравненій и ихъ отдѣленіи.

В. А. Стеклова.

§ 1.

Въ настоящей замѣткѣ я не желаю дать общаго теоретически стройнаго метода для рѣшенія вопроса объ отысканіи предѣловъ корней алгебраическихъ уравненій и ихъ отдѣленіи; цѣль будетъ достигнута, если удастся найти такой частный пріемъ, который давалъ-бы возможность рѣшить эти вопросы въ большинствѣ случаевъ съ меньшей затратой времени, съ меньшимъ числомъ вычисленій.

Изъ существующихъ способовъ опредѣленія высшихъ предѣловъ положительныхъ корней уравненій наиболѣе употребительны два: Ньютона и Лагерра. Первый основанъ на извѣстныхъ свойствахъ производныхъ данной функціи, представляющей лѣвую часть уравненія; второй на нѣкоторыхъ свойствахъ особыхъ функцій Лагерра. Первый точнѣе въ теоретическомъ отношеніи; второй болѣе удобенъ въ практическомъ. Остановимся на послѣднемъ.

Пусть

$$f(x) = V_0 = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots A_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

заданное уравненіе.

Составимъ рядъ функцій

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}, \\ V_2 = x^{n-2} + A_1 x^{n-3} + \ldots + A_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_{n-2} = x^2 + A_1 x + A_2, \\ V_{n-1} = x + A_1, \\ V_n = 1. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Если при $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$ всѣ функціи $V_i (i = 0, 1, 2, 3 \ldots n)$ положительны, то α есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія.

Замѣтивъ [1]), что всякое

$$V_k = x V_{k+1} + A_{n-k}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

найдемъ, что при $\alpha_1 > \alpha$

$$V_{n-1}(\alpha_1) > V_{n-1}(\alpha), \quad V_{n-2}(\alpha_1) > V_{n-2}(\alpha) \ldots, \quad V_0(\alpha_1) > V_0(\alpha), \quad . \quad (2_1)$$

откуда слѣдуетъ, что, при возрастаніи x отъ α до ∞, функція V_0 возрастаетъ, оставаясь всегда положительною, и слѣдовательно $x = \alpha$ есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія (1).

Преимущество способа Лагерра передъ Ньютоновымъ состоитъ въ сравнительно простѣйшемъ вычисленіи функцій $V_1 \ldots V_{n-1}$, законъ образованія которыхъ дается равенствомъ (2), но во всякомъ случаѣ этотъ способъ можетъ потребовать весьма сложныхъ вычисленій, особенно если искомый предѣлъ и степень уравненія достаточно высоки. Не имѣя напередъ никакой догадки о первомъ, мы должны подставлять рядъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ (если хотимъ найти его въ цѣлыхъ числахъ) отъ нуля до нѣкотораго k и каждый разъ вычислять рядъ функцій (α), что можетъ составить очень длинную операцію, особенно если коэффиціенты большія числа.

Понятно, замѣтимъ между прочимъ, что теорема Лагерра дастъ низшій предѣлъ положительныхъ корней разсматриваемаго уравненія, если, положивъ $x = \dfrac{1}{x_1}$, опредѣлимъ при помощи ея высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія

$$f_1(x_1) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n = 0, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

которое назовемъ обратнымъ уравненіемъ.

---

[1]) Привожу доказательство, данное г. Мясоѣдовымъ въ статьѣ „Двѣ теоремы Высшей Алгебры“. См. Математич. Сборникъ, томъ XI, стр. 617.

Высшіе и низшіе предѣлы отрицательныхъ корней получатся, если вмѣсто x введемъ перемѣнную $-x_2$, а затѣмъ вмѣсто x_2 обратную ей $\dfrac{1}{x_3}$, и будемъ искать высшіе предѣлы положительныхъ корней такимъ образомъ преобразованныхъ уравненій.

§ 2.

Въ настоящей замѣткѣ я постараюсь показать, что въ большинствѣ случаевъ можно отыскать предѣлы корней несравненно простѣйшимъ пріемомъ, не прибѣгая къ сколько-нибудь сложнымъ вычисленіямъ. Для этого установимъ слѣдующее, почти очевидное, предложеніе.

Между коэффиціентами A_n, $A_{n-1}, \ldots A_1$ *и* $(n-1)$ *параметрами*

$$k_1,\; k_2 \ldots k_{n-1}$$

всегда можно установить $(n-1)$ *равенствъ вида*

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= -k_1(A_{n-1}+k_{n-1}),\\
k_{n-1} &= k_1(A_{n-2}+k_{n-2}),\\
k_{n-2} &= k_1(A_{n-3}+k_{n-3}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
k_3 &= k_1(A_2+k_2),\\
k_2 &= k_1(A_1+k_1),
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

причемъ параметръ k_1, *входящій множителемъ въ правыя части всѣхъ этихъ равенствъ, будетъ необходимо однимъ изъ корней уравненія*

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n = 0.$$

Помноживъ обѣ части этихъ равенствъ (4), начиная съ третьяго послѣдовательно на k_1, $k_1{}^2 \ldots$ до k_1^{n-3} и сложивъ все, за исключеніемъ перваго, получимъ

$$k_{n-1} = k_1 A_{n-2} + k_1{}^2 A_{n-3} + \ldots + k_1^{n-2}A_1 + k_1^{n-1},$$

откуда, при помощи перваго изъ нихъ, находимъ

$$k_1^n + A_1k_1^{n-1} + \ldots + k_1{}^2A_{n-2} + k_1A_{n-1} + A_n = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

*

Давъ k_1 значеніе одного изъ корней уравненія (5), опредѣлимъ изъ равенствъ (4), начиная съ послѣдняго, всѣ $k_i (i = 2\,,\ 3 \ldots n-1)$, а первое обратится въ тождество

$$(A_n) = (A_n)\,,$$

гдѣ (A_n) обозначаетъ численное значеніе коэффиціента A_n. При всякомъ же k_1, отличномъ отъ одного изъ корней разсматриваемаго уравненія, правая часть перваго равенства будетъ или $>$ или $< A_n$, коэффиціента при нулевой степени k_1 въ уравненіи (5).

Систему равенствъ (4) можно разсматривать, слѣдовательно, только какъ особое изображеніе уравненія (5), и подстановка въ первое изъ нихъ k_{n-1}, вычисленнаго послѣдовательно, при данномъ k_1, изъ остальныхъ равенствъ, есть не что иное какъ подстановка даннаго значенія k_1 въ изслѣдуемое уравненіе (5). Отсюда непосредственно заключаемъ, что если дадимъ k_1 значеніе большее наибольшаго изъ положительныхъ корней уравненія, то

$$A_n > -k_1(A_{n-1} + k_{n-1})\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

гдѣ подъ k_1 разумѣется данное его значеніе (или большее), а подъ k_{n-1} вычисленное по равенствамъ (4). Если, далѣе, дадимъ k_1 два значенія k'_1 и k_1'', вычислимъ соотвѣтствующія имъ значенія k'_{n-1} и k''_{n-1} и составимъ выраженія

$$-k'_1(A_{n-1} + k'_{n-1}) \quad \text{и} \quad -k''_1(A_{n-1} + k''_{n-1})\,,$$

то, если между k'_1 и k''_1 заключается четное число корней уравненія (5) или ни одного

$$A_n \gtrless -k'_1(A_{n-1} + k'_{n-1})\,,\ A_n \gtrless -k''_1(A_{n-1} + k''_{n-1})\,, \quad \ldots \quad (7)$$

если же нечетное или одинъ, то

$$A_n \gtrless -k'_1(A_{n-1} + k'_{n-1})\,,\ A_n \lesseqgtr -k''_1(A_{n-1} + k''_{n-1})\,, \quad \ldots \quad (8)$$

причемъ въ выраженіяхъ (7) и (8) надо брать одновременно верхніе или нижніе знаки.

Принявъ во вниманіе условія неравенства (6), мы, по одному взгляду на равенства (4), заключаемъ о возможности въ какомъ угодно частномъ случаѣ вычислить высшій предѣлъ положительныхъ корней съ достаточной точностью, полагая его, впрочемъ, большимъ единицы, что въ большинствѣ случаевъ соотвѣтствуетъ дѣйствительности, за исключеніемъ того, когда всѣ корни заключаются между 0 и 1. Послѣдній случай, впрочемъ, всегда можно подвести подъ первый, стоитъ только замѣнить

$$x \text{ черезъ } x_1 - 1$$

и искать высшій предѣлъ положительныхъ корней преобразованнаго уравненія, который несомнѣнно будетъ > 1.

Не входя въ длинный рядъ общихъ разсужденій, я разсмотрю нѣсколько частныхъ примѣровъ и сравню отысканіе высшихъ предѣловъ положительныхъ корней по данному пріему и способу Лагерра, для чего я въ началѣ статьи и изложилъ вкратцѣ содержаніе послѣдняго.

§ 3.

Возьмемъ извѣстное уравненіе Лагранжа [1])

$$x^3 - 7x + 7 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Примѣняя способъ Лагерра, составляемъ функціи

$$V_0 = x^3 - 7x + 7\,,$$
$$V_1 = x^2 - 7\,,$$
$$V_2 = x\,,$$
$$V_3 = 1\,.$$

Подставляя въ этотъ рядъ значенія $x = 0, 1, 2, 3$, получаемъ таблицу

x	V_0	V_1	V_2	V_3
0	$+$	$-$	0	$+$
1	$+$	$-$	$+$	$+$
2	$+$	$-$	$+$	$+$
3	$+$	$+$	$+$	$+$

откуда и заключаемъ, что 3 есть искомый предѣлъ. Такимъ образомъ, для достиженія добытаго результата пришлось выполнить 6 вычисле-

---

[1]) См. Serret, „Cours d'Algèbre supérieure". T. I. и Математическій Сборникъ, T. XI, стр. 618.