

УДК 51(075.8)  
ББК 22.1я73  
В93

**Всероссийский заочный финансово-экономический институт**

Ректор акад. *А.Н. Романов*

Председатель Научно-методического совета проф. *Д.М. Дайитбегов*

**К о л л е к т и в   а в т о р о в :**

проф. Н.Ш. Кремер (предисловие, введение, гл. 2—7, 9, 13, 14, 16),

доц. Б.А. Путко (гл. 8, 15), доц. И.М. Тришин (гл. 10—12),

доц. М.Н. Фридман (гл. 1)

**Р е ц е н з е н т ы :**

*кафедра математики Финансовой Академии при Правительстве РФ*

(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Солодовников)

и д-р физ.-мат. наук, проф. *В.З. Партон*

Главный редактор издательства *Н.Д. Эриашвили,*

кандидат юридических наук, доктор экономических наук, профессор,

лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники

**В93**     **Высшая математика для экономистов: учебник для**  
студентов вузов, обучающихся по экономическим спе-  
циальностям / [Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. проф.  
Н.Ш. Кремера. — 3-е изд. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2015. —  
479 с. — (Серия «Золотой фонд российских учебников»)  
**И. Кремер, Наум Шевелевич.**

ISBN 978-5-238-00991-9

Агентство СІР РГБ

Эта книга — не только учебник, но и краткое руководство к решению задач по основам высшей математики. Излагаемые в достаточно краткой форме с необходимыми обоснованиями основные положения учебного материала сопровождаются большим количеством задач, приводимых с решениями и для самостоятельной работы. Там, где это возможно, раскрывается экономический смысл математических понятий, приводятся простейшие приложения высшей математики в экономике (балансовые модели, предельный анализ, эластичность функций, производственные функции, модели динамики и т.п.).

Для студентов и аспирантов экономических вузов, экономистов и лиц, занимающихся самообразованием.

**ББК 22.1я73**

ISBN 978-5-238-00991-9

© Коллектив авторов, 1997, 1998, 2006

© ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА, 1997, 1998, 2006

Принадлежит исключительное право на использование и распространение издания (ФЗ № 94-ФЗ от 21 июля 2005 г.).

Воспроизведение всей книги или любой ее части любыми средствами или в какой-либо форме, в том числе в интернет-сети, запрещается без письменного разрешения издательства.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b>	<b>3</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>5</b>
<b>Раздел I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ</b>	<b>9</b>
<b>Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ</b>	<b>10</b>
1.1. Основные сведения о матрицах	10
1.2. Операции над матрицами	12
1.3. Определители квадратных матриц	17
1.4. Свойства определителей	22
1.5. Обратная матрица	26
1.6. Ранг матрицы	29
<i>Упражнения</i>	36
<b>Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ</b>	<b>38</b>
2.1. Основные понятия и определения	38
2.2. Система $n$ линейных уравнений с $n$ переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера	40
2.3. Метод Гаусса	44
2.4. Система $m$ линейных уравнений с $n$ переменными	47
2.5. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений	51
2.6. Решение задач	53
2.7. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики (балансовый анализ)	56
<i>Упражнения</i>	60
<b>Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА</b>	<b>63</b>
3.1. Векторы на плоскости и в пространстве	63
3.2. $n$ -мерный вектор и векторное пространство	68
3.3. Размерность и базис векторного пространства	70
3.4. Переход к новому базису	74
3.5. Евклидово пространство	76

3.6. Линейные операторы	78
3.7. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора	82
3.8. Квадратичные формы	85
3.9. Линейная модель обмена	90
<i>Упражнения</i>	92
<b>Глава 4. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ</b>	<b>95</b>
4.1. Уравнение линии на плоскости	95
4.2. Уравнение прямой	96
4.3. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой	101
4.4. Окружность и эллипс	104
4.5. Гипербола и парабола	108
4.6. Решение задач	115
4.7. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве	119
<i>Упражнения</i>	121
<b>Раздел II. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ</b>	<b>123</b>
<b>Глава 5. ФУНКЦИЯ</b>	<b>124</b>
5.1. Понятие множества	124
5.2. Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки	125
5.3. Понятие функции. Основные свойства функций	126
5.4. Основные элементарные функции	129
5.5. Элементарные функции. Классификация функций. Преобразование графиков	132
5.6. Применение функций в экономике. Интерполирование функций	135
5.7. Решение задач	139
<i>Упражнения</i>	141
<b>Глава 6. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ</b>	<b>142</b>
6.1. Предел числовой последовательности	142
6.2. Предел функции в бесконечности и в точке	144
6.3. Бесконечно малые величины	148
6.4. Бесконечно большие величины	151
6.5. Основные теоремы о пределах. Признаки существования предела	154

6.6. Замечательные пределы. Задача о непрерывном начислении процентов	157
6.7. Непрерывность функции	162
6.8. Решение задач	167
<i>Упражнения</i>	175
<b>Раздел III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ</b>	<b>177</b>
<b>Глава 7. ПРОИЗВОДНАЯ</b>	<b>178</b>
7.1. Задачи, приводящиеся к понятию производной	178
7.2. Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции	180
7.3. Схема вычисления производной. Основные правила дифференцирования	183
7.4. Производная сложной и обратной функций	186
7.5. Производные основных элементарных функций. Понятие о производных высших порядков	190
7.6. Экономический смысл производной. Использование понятия производной в экономике	196
7.7. Решение задач	201
<i>Упражнения</i>	207
<b>Глава 8. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ</b>	<b>210</b>
8.1. Основные теоремы дифференциального исчисления	210
8.2. Правило Лопиталя	214
8.3. Возрастание и убывание функций	217
8.4. Экстремум функции	219
8.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	225
8.6. Выпуклость функции. Точки перегиба	226
8.7. Асимптоты графика функции	230
8.8. Общая схема исследования функций и построения их графиков	233
8.9. Решение задач	236
8.10. Приложение производной в экономической теории	242
<i>Упражнения</i>	243
<b>Глава 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ</b>	<b>246</b>
9.1. Понятие дифференциала функции	246
9.2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях	248
9.3. Понятие о дифференциалах высших порядков	251
<i>Упражнения</i>	252

<b>Раздел IV. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b>	<b>253</b>
<b>Глава 10. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</b>	<b>254</b>
10.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл	254
10.2. Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций	256
10.3. Метод замены переменной	261
10.4. Метод интегрирования по частям	265
10.5. Интегрирование простейших рациональных дробей	269
10.6. Интегрирование некоторых видов иррациональностей	273
10.7. Интегрирование тригонометрических функций	276
10.8. Решение задач	278
10.9. Об интегралах, «неберущихся» в элементарных функциях	282
<i>Упражнения</i>	282
<b>Глава 11. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</b>	<b>285</b>
11.1. Понятие определенного интеграла, его геометричес- кий и экономический смысл	285
11.2. Свойства определенного интеграла	290
11.3. Определенный интеграл как функция верхнего предела	294
11.4. Формула Ньютона–Лейбница	297
11.5. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле	299
11.6. Геометрические приложения определенного интеграла	301
11.7. Несобственные интегралы	308
11.8. Приближенное вычисление определенных интегралов	313
11.9. Использование понятия определенного интеграла в экономике	316
11.10. Решение задач	320
<i>Упражнения</i>	324
<b>Глава 12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b>	<b>326</b>
12.1. Основные понятия	326

12.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения	329
12.3. Элементы качественного анализа дифференциальных уравнений первого порядка	331
12.4. Неполные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющи- мися переменными	335
12.5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка	338
12.6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	340
12.7. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка	341
12.8. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	342
12.9. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике	351
<i>Упражнения</i>	355
<b>Раздел V. РЯДЫ</b>	<b>357</b>
<b>Глава 13. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ</b>	<b>358</b>
13.1. Основные понятия. Сходимость ряда	358
13.2. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд	362
13.3. Ряды с положительными членами	364
13.4. Ряды с членами произвольного знака	371
13.5. Решение задач	375
<i>Упражнения</i>	379
<b>Глава 14. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ</b>	<b>381</b>
14.1. Область сходимости степенного ряда	381
14.2. Ряд Маклорена	386
14.3. Применение рядов в приближенных вычислениях	391
14.4. Решение задач	394
<i>Упражнения</i>	399
<b>Раздел VI. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ</b>	<b>401</b>
<b>Глава 15. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ</b>	<b>402</b>
15.1. Основные понятия	402

15.2. Предел и непрерывность	407
15.3. Частные производные	409
15.4. Дифференциал функции	411
15.5. Производная по направлению. Градиент	412
15.6. Экстремум функции нескольких переменных	415
15.7. Наибольшее и наименьшее значения функции	419
15.8. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа	422
15.9. Понятие об эмпирических формулах. Метод наименьших квадратов	425
15.10. Понятие двойного интеграла	430
15.11. Функции нескольких переменных в экономической теории	433
15.12. Решение задач	438
<i>Упражнения</i>	440
<b>Приложение</b>	<b>443</b>
<b>Глава 16. Комплексные числа</b>	<b>443</b>
16.1. Арифметические операции над комплексными числами. Комплексная плоскость	443
16.2. Тригонометрическая и показательная формы комплекс- ного числа	445
<i>Упражнения</i>	449
<b>Литература</b>	<b>450</b>
<b>Ответы к упражнениям</b>	<b>451</b>
<b>Алфавитно-предметный указатель</b>	<b>461</b>