

УДК 517.5
ББК 162
Р 32

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Южного федерального университета*

Рецензент:
кандидат физико-математических наук, доцент А. Б. Моргулис

*Учебное пособие подготовлено и издано в рамках национального проекта «Образование»
по «Программе развития федерального государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования “Южный федеральный университет”
на 2007–2010 гг.»*

Ревина С. В., Сазонов Л. И.

Р 32 **Функциональный анализ в примерах и задачах: учебное пособие / С. В. Ревина, Л. И. Сазонов. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. — 120 с.**

ISBN 978-5-9275-0683-5

С помощью большого количества примеров и упражнений излагаются основы функционального анализа — понятия метрических, банаховых и гильбертовых пространств, а также их свойства.

Учебное пособие предназначено для студентов, преподавателей и всех желающих научиться применять функциональный анализ на практике.

ISBN 978-5-9275-0683-5

**УДК 517.5
ББК 162**

© Ревина С. В., Сазонов Л. И., 2009
© Южный федеральный университет, 2009
© Оформление. Макет. Издательство
Южного федерального университета, 2009

Оглавление

Введение	5
1 Основные понятия	6
1.1 Аксиомы метрики	6
1.2 Примеры задания метрик на прямой	7
1.3 Неравенства Гельдера и Минковского	8
1.4 Метрики в \mathbb{R}^n	13
1.5 Шары в метрических пространствах	15
1.6 Сходимость последовательностей	17
1.7 Эквивалентные метрики	17
1.8 Декартово произведение метрических пространств	18
1.9 Открытые и замкнутые множества	19
2 Пространства последовательностей	21
2.1 Определения пространств последовательностей	21
2.2 Сходимость в пространствах последовательностей	23
2.3 Связь между пространствами ℓ_p и S	25
2.4 Сепарабельность	25
2.5 Пример неархимедовой метрики	27
3 Пространства непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций	31
3.1 Линейные нормированные пространства $C[a, b]$, $C^m[a, b]$	31
3.2 Примеры счетно-нормированных пространств	33
4 Пространства Лебега	35
4.1 Пространства $L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$	35
4.2 Экстремальные точки шара $\overline{S}_1(0)$ в пространствах $L_p(0, 1)$	40
4.3 Пространство $L_\infty(a, b)$	43
4.4 Пространства $L_{p,loc}(\Omega)$	46
5 Непрерывность отображений	48
6 Полнота метрических пространств	51
6.1 Определение полноты	51
6.2 Доказательство полноты	52
6.3 Пример неполного пространства	55
6.4 Теорема о пополнении	56
6.5 Принцип вложенных шаров и теорема Бэра	57

7	Принцип сжимающих отображений	59
7.1	Общие сведения	59
7.2	Применение к алгебраическим уравнениям и системам	60
7.3	Применение к интегральным и дифференциальным уравнениям	65
8	Линейные нормированные пространства	72
8.1	Банаховы пространства	72
8.2	Гильбертовы пространства	73
8.3	Эквивалентные нормы	76
8.4	Подпространство	77
8.5	Геометрия гильбертова пространства	78
8.6	Процесс ортогонализации Грама-Шмидта	79
8.7	Базисы банаховых и гильбертовых пространств	81
9	Линейные операторы в линейных нормированных пространствах	86
9.1	Ограниченность и норма линейного оператора	86
9.2	Обратимость линейного оператора	91
9.3	Сходимость элементов, операторов, функционалов	95
9.4	Сопряженный оператор	96
10	Компактность в метрических пространствах	100
10.1	Относительная компактность и ограниченность	100
10.2	Критерий Хаусдорфа	101
10.3	Гильбертов кирпич	102
10.4	Отображения на компактных множествах	104
10.5	Компактность в $C[0, 1]$	107
10.6	Компактность в $L_2(0, 1)$	109
10.7	Линейные вполне непрерывные операторы	110
11	Топологические пространства	116
	Литература	118