

Г. П. Башарин

# ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕЛЕТРАФИКА

Издание третье, исправленное и дополненное

*Рекомендовано*

*Учебно-методическим советом по прикладной  
математике и информатике УМО  
по классическому университетскому образованию  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся  
по специальности 010200 «Прикладная  
математика и информатика» и по направлению  
510200 «Прикладная математика  
и информатика»*

Москва

Российский университет дружбы народов  
2009

ББК 22.1

Б 33

Утверждено  
РИС Ученого совета  
Российского университета  
дружбы народов

Р е ц е н з е н т ы:

член-корр. РАН, зав. кафедрой АСВК ф-та ВМК МГУ *Л.Н. Королев*  
д.ф.-м.н., профессор, зам. директора ИПИ РАН *С.Я. Шоргин*

**Башарин Г. П.**

**Б 33** Лекции по математической теории телетрафика: Учеб.  
пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: РУДН, 2009. — 342 с.: ил.

**ISBN 978-5-209-03058-4**

В основу пособия положен двухсеместровый курс лекций для студентов магистратуры направления «Прикладная математика и информатика», ориентированных на работу в области систем и сетей телекоммуникаций, а также информационных технологий.

В главе 1 излагаются основы классической теории телетрафика, а в главах 2 и 3 — ее обобщение на мультисервисные модели Эрланга и Энгсета. В главе 4 рассматриваются основы теории открытых и замкнутых сетей массового обслуживания, а в главе 5 анализируются модели буферизации в узле коммутации пакетов и фрагмента системы спутниковой связи. В главе 6 кратко изложены основные понятия и методы управления доступом в мультисервисных сетях связи. В главе 7 предлагается несколько новейших моделей сетей сотовой и оптической связи. Во всех главах приводятся эффективные алгоритмы расчета показателей качества обслуживания. Пособие включает также три справочно-математических и два учебно-методических приложения.

Для студентов, аспирантов, преподавателей ряда смежных специальностей, а также специалистов исследовательских подразделений в области телекоммуникационных и компьютерных систем и сетей.

ISBN 978-5-209-03058-4

ББК 22.1

© Башарин Г. П., 2009

© Российский университет дружбы народов, Издательство, 2009.

## Оглавление

Предисловие	11
Список основных сокращений с указанием поясняющих разделов	19
Глава 1. Классические моносервисные модели Эрланга и Энгсета	23
§1.1 Первая модель Эрланга . . . . .	23
1.1.1. Постановка задачи. . . . .	23
1.1.2. Построение процесса размножения и гибели. . . . .	25
1.1.3. Распределение и первая формула Эрланга. . . . .	28
§1.2 Нагрузка и ее характеристики . . . . .	32
1.2.1. Предварительные замечания. . . . .	32
1.2.2. Определение и виды нагрузки. . . . .	34
1.2.3. О статистической оценке характеристик нагрузки. . . . .	36
1.2.4. Еще об интенсивности нагрузки. . . . .	38
1.2.5. Об измерении нагрузки в сетях с КК и КП . . . . .	40
1.2.6. О порядке занятия свободных приборов. . . . .	43
§1.3 Модель Эрланга с ожиданием и блокировками . . . . .	45
1.3.1. Постановка задачи. . . . .	45
1.3.2. Второе распределение Эрланга. . . . .	46
1.3.3. Оценка интенсивности принятой нагрузки и вторая формула Эрланга. . . . .	52
§1.4 Модель Энгсета . . . . .	54
1.4.1. Описание модели Энгсета. . . . .	54
1.4.2. Построение процесса размножения и гибели. . . . .	54
1.4.3. Распределение Энгсета числа занятых линий для случая $N > v$ . . . . .	57
1.4.4. Биномиальное распределение числа занятых линий при $N \leq v$ . . . . .	60

1.4.5. Связь между вероятностями блокировок по времени, по вызовам и по нагрузке. . . . .	63
§1.5 Новая модель Энгсетовского типа . . . . .	66
1.5.1. Оптический коммутатор. . . . .	66
1.5.2. Математическая модель ОК с КП. . . . .	67
§1.6 Методические комментарии . . . . .	72
<b>Глава 2. Мультисервисная модель Эрланга</b>	
<b>с явными потерями</b>	<b>75</b>
§2.1 Пример мультиплексирования в АТМ . . . . .	75
§2.2 Основные параметры мультисервисной модели Эрланга . . . . .	77
§2.3 Пространство состояний системы . . . . .	79
§2.4 Теорема о равновесном распределении . . . . .	82
§2.5 Вероятность потерь и другие макрохарактеристики . . . . .	87
§2.6 Рекуррентный алгоритм вычисления макрохарактеристик . . . . .	89
§2.7 Однородные мультисервисные СМО ( $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ ) . . . . .	93
§2.8 Методические комментарии . . . . .	95
<b>Глава 3. Мультисервисные модели Энгсета</b>	
<b>с явными потерями</b>	<b>98</b>
§3.1 Две мультисервисные модели Энгсета . . . . .	98
§3.2 Основные предположения и параметры для двух мультисервисных моделей энгсетовского типа . . . . .	100
§3.3 Пространство состояний . . . . .	102
3.3.1. Мультисервисная модель типа Энгсет-1. . . . .	102
3.3.2. Мультисервисная модель типа Энгсет-2. . . . .	103
§3.4 Теоремы о равновесном распределении . . . . .	104
§3.5 Рекуррентный алгоритм вычисления макрохарактеристик . . . . .	107
§3.6 Методические комментарии . . . . .	112

<b>Глава 4. Сети массового обслуживания</b>	<b>114</b>
§4.1 Немного истории . . . . .	114
§4.2 Описание модели . . . . .	117
4.2.1. Узел. . . . .	117
4.2.2. Сеть. . . . .	118
4.2.3. Входящий поток в открытой сети. . . . .	119
4.2.4. Маршруты заявок. . . . .	119
§4.3 Открытые однородные экспоненциальные сети (сети Джексона) . . . . .	122
4.3.1. Параметры сети Джексона. . . . .	122
4.3.2. Быстродействие узла и длительность об- служивания. . . . .	124
4.3.3. Условие отсутствия перегрузок в сети. . . . .	125
4.3.4. Интенсивность потоков в сети Джексона. . . . .	126
4.3.5. Анализ частот посещения заявкой узлов се- ти Джексона. . . . .	130
4.3.6. Равновесное распределение числа заявок в узлах сети Джексона. . . . .	136
§4.4 Замкнутые однородные экспоненциальные сети . . . . .	144
4.4.1. Постановка задачи. . . . .	144
4.4.2. Равновесное распределение числа заявок в узлах. . . . .	148
§4.5 Рекуррентные алгоритмы вычисления характеристик замкнутой сети . . . . .	152
4.5.1. Свойства нормирующей константы. . . . .	152
4.5.2. Вычисление нормирующей константы ме- тодом Бузена. . . . .	156
4.5.3. Характеристики производительности узлов замкнутой сети. . . . .	161
§4.6 Методические комментарии . . . . .	167
<b>Глава 5. Примеры анализа некоторых телекоммуникационных систем сложной структуры</b>	<b>169</b>
§5.1 Постановка задачи . . . . .	169

§5.2	Математическая модель буферизации в узле коммутации пакетов . . . . .	171
§5.3	Математическая модель фрагмента системы спутниковой связи . . . . .	177
5.3.1.	Введение. . . . .	177
5.3.2.	Построение модели фрагмента системы спутниковой связи. . . . .	179
5.3.3.	Математическая модель фрагмента ССС. . . . .	182
5.3.4.	Равновесное распределение для СМО $\langle S^2, A_5 \rangle$ . . . . .	183
5.3.5.	Вероятности потерь и другие макрохарактеристики. . . . .	188
§5.4	Методические комментарии . . . . .	191
<b>Глава 6. Управление доступом для мультисервисных СМО</b>		<b>192</b>
§6.1	Стратегии доступа. Основные определения . . . . .	193
§6.2	Управление доступом и мультипликативность . . . . .	197
6.2.1.	СУГБ. . . . .	197
6.2.2.	СУЧБ. . . . .	199
§6.3	Координатно-выпуклые стратегии . . . . .	202
6.3.1.	Координатно-выпуклое множество. . . . .	202
6.3.2.	Основные примеры координатно-выпуклых стратегий. . . . .	203
§6.4	Об оптимизации стратегии доступа . . . . .	207
6.4.1.	Постановка задачи. . . . .	207
6.4.2.	Система с общей памятью и выделенными приборами. . . . .	208
6.4.3.	Система без мест для ожидания. . . . .	210
6.4.4.	Экстремальный трафик. . . . .	211
§6.5	Методические комментарии . . . . .	213
<b>Глава 7. Новые примеры анализа ВВХ телекоммуникационных систем</b>		<b>215</b>
§7.1	Немного об эволюции мобильных сетей . . . . .	215
§7.2	Анализ фрагмента иерархической сети сотовой связи	217

7.2.1.	Введение. . . . .	217
7.2.2.	Модель кластера двухуровневой ССПС. . .	221
7.2.3.	Вывод условий мультипликативности. . . .	224
7.2.4.	Анализ основных ВВХ. . . . .	233
§7.3	Анализ ВВХ микросоты с двумя типами каналов и учетом мобильности абонентов . . . . .	234
7.3.1.	Введение. . . . .	234
7.3.2.	Построение математической модели . . . .	234
7.3.3.	Вывод СУГБ. . . . .	236
7.3.4.	Вывод одномерных распределений. . . . .	240
7.3.5.	Эквивалентная физическая модель. . . . .	243
7.3.6.	Рекуррентный алгоритм. . . . .	245
7.3.7.	Оптимизация числа каналов. . . . .	246
§7.4	Анализ производительности фрагмента сотовой сети с учетом перекрытия зон радиосвязи . . . . .	248
7.4.1.	Введение. . . . .	248
7.4.2.	Математическая модель. . . . .	249
7.4.3.	Решение СУЛБ. . . . .	255
7.4.4.	Параметры производительности системы. .	256
7.4.5.	Численный анализ. . . . .	257
§7.5	Математическая модель оптической сети с марш- рутизацией по длине волны . . . . .	260
7.5.1.	Введение. . . . .	260
7.5.2.	Сети с маршрутизацией по длине волны. .	261
7.5.3.	Задача маршрутизации и назначения длин волн. . . . .	262
7.5.4.	Предположения и обозначения. . . . .	264
7.5.5.	Пространство состояний и равновесное рас- пределение. . . . .	268
7.5.6.	Приближенный анализ. . . . .	271
§7.6	Итоговые научно-методические комментарии . . .	278
7.6.1.	Оптические коммутаторы и оптические сети.	278
7.6.2.	Об основных направлениях исследований по ТТ на кафедре СТ. . . . .	280

<b>Приложение А. Скачкообразные марковские процессы</b>	<b>284</b>
А.1 Определение и основные характеристики однородного МП . . . . .	284
А.2 Конструктивное описание скачкообразного МП . .	290
А.3 Система уравнений равновесия и равновесное распределение для ступенчатого МП . . . . .	292
<b>Приложение Б. Процессы размножения и гибели</b>	<b>296</b>
Б.1 Постановка задачи . . . . .	296
Б.2 Матрицы $A$ и $Q$ . . . . .	297
Б.3 Локальный баланс и равновесное распределение . . . . .	298
Б.4 Процесс чистого размножения . . . . .	302
<b>Приложение В. Обратимые марковские процессы и критерий Колмогорова</b>	<b>304</b>
В.1 Определение и свойства обратимого марковского процесса . . . . .	304
В.2 Критерий Колмогорова . . . . .	306
В.3 Примеры . . . . .	307
В.4 Если критерий Колмогорова не выполняется . . .	312
<b>Приложение Г. Практические задания для самостоятельной работы</b>	<b>315</b>
<b>Приложение Д. Программа экзамена по курсу МТТ для студентов магистратуры</b>	<b>323</b>
<b>Вместо заключения</b>	<b>327</b>
<b>Литература</b>	<b>336</b>