

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

## **ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:

**Медведева** Ольга Александровна

**Медведев** Сергей Николаевич

Издательско-полиграфический центр  
Воронежского государственного университета

2015

## ВВЕДЕНИЕ

Задача о назначениях, её линейные, квадратичные и многоиндексные разновидности привлекают внимание исследователей ввиду своей обширной применимости в различных областях научной и практической деятельности. Самой известной и изученной является линейная закрытая задача о назначениях, которая относится к задачам дискретной оптимизации. Для неё существуют точные методы решения, такие как венгерский алгоритм, метод потенциалов, метод ветвей и границ. Однако дополнительные требования, обусловленные практическими задачами, приводят к различным модификациям математической модели, в частности к изменению стандартных и/или добавлению новых ограничений. При этом также необходимо внесение изменений в стандартные алгоритмы.

Авторы старались в данной работе привести помимо линейной задачи о назначениях и венгерского метода её решения разнообразные модификации данной задачи, требующие изменения математической модели и алгоритма решения.

Методическая разработка состоит из 2-х параграфов. В 1-м рассмотрена классическая задача о назначениях, а также венгерский метод для её решения с подробным описанием этапов, во 2-м представлены модификации задачи, связанные с внесением дополнительных требований в формулировку, приведены их математические модели и алгоритмы решения. Все методические рекомендации проиллюстрированы необходимым количеством примеров.

матрица, у которой в каждой строке и в каждом столбце имеется ровно одна единица, а остальные элементы являются нулями.

Заметим, что все задачи о назначениях размера  $n \times n$  имеют одно и то же допустимое множество и отличаются друг от друга только коэффициентами целевой функции, т.е. матрицей затрат  $C = \{c_{ij}\}_{n \times n}$ .

## 1.2 Венгерский метод решения

Приведём формулировки нескольких теорем, на которых основан венгерский метод:

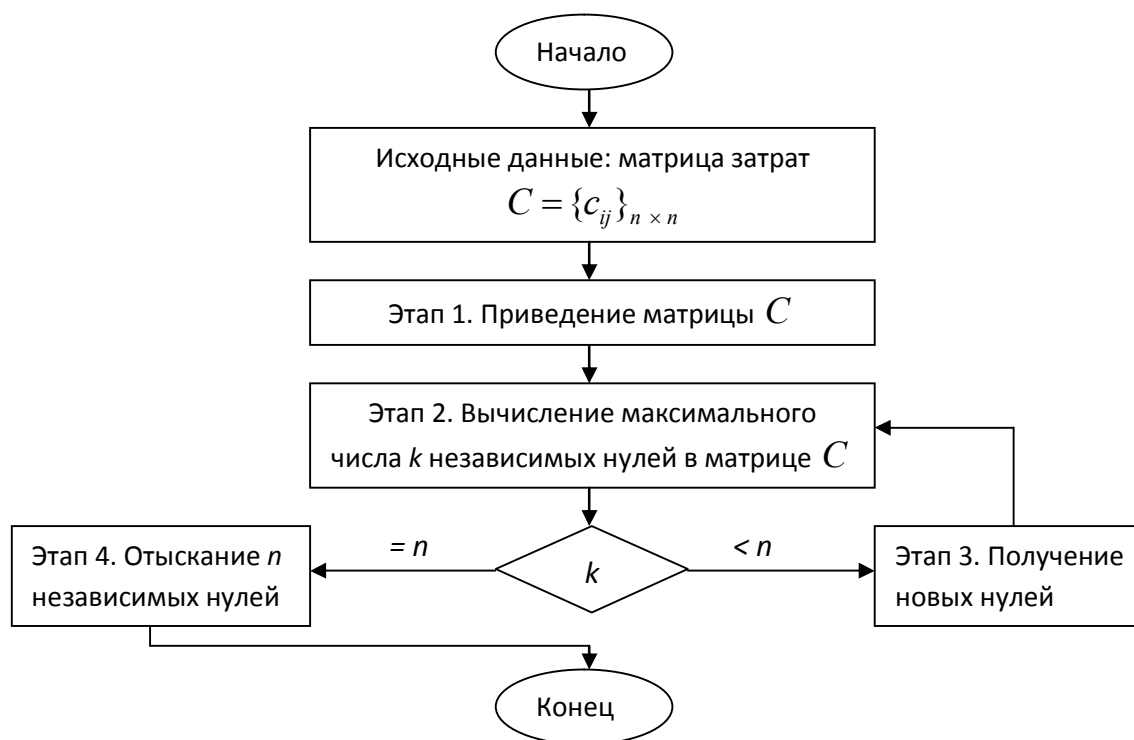
**Теорема 1.** Если элементы матриц  $C = \{c_{ij}\}_{n \times n}$  и  $D = \{d_{ij}\}_{n \times n}$  связаны равенствами  $d_{ij} = c_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ , то задачи о назначениях с данными матрицами эквивалентны, т.е. множества их решений (оптимальных точек) совпадают.

В дальнейшем преобразования вида  $d_{ij} = c_{ij} + \alpha_i + \beta_j$  (добавление ко всем элементам любой строки или любого столбца одного и того же числа) будем называть *эквивалентными преобразованиями*.

**Следствие.** Всегда можно считать, что все элементы матрицы  $C$  неотрицательны, т.е.  $\forall i, j = \overline{1, n} \ (c_{ij} \geq 0)$ .

**Теорема 2.** Пусть все элементы матрицы  $C$  неотрицательны, т.е.  $\forall i, j = \overline{1, n} \ (c_{ij} \geq 0)$ . Если в ней имеются  $n$  независимых нулевых элементов  $c_{ij} = 0$ , то их сумма является минимальной.

На основе представленных выше утверждений рассмотрим **венгерский метод решения** задачи о назначениях. Данный алгоритм предназначен для решения классической (закрытой) задачи о назначениях с заданной матрицей  $C = \{c_{ij}\}_{n \times n}$  (где  $c_{ij}$  – конечные числа). Общая схема метода имеет вид:



Остановимся подробнее на каждом из этапов.

### Этап 1 (приведение матрицы)

Матрица  $C$  называется *приведённой*, если все её элементы неотрицательны и, кроме того, в каждой строке и в каждом столбце имеются нулевые элементы.

Таким образом, приведённая матрица  $C$  удовлетворяет двум условиям:

1.  $\forall i, j = \overline{1, n} \ (c_{ij} \geq 0)$ ,
2.  $\forall i \ \exists j \ (c_{ij} = 0) \ \wedge \ \forall j \ \exists i \ (c_{ij} = 0)$ .

Для приведения матрицы  $C$  с элементами  $c_{ij} \geq 0$  нужно воспользоваться эквивалентными преобразованиями. При этом сначала осуществляется приведение матрицы по строкам, т.е. в каждой строке ищется наименьший элемент  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и осуществляется переход к матрице  $C'$  с элементами  $c'_{ij} = c_{ij} - \alpha_i$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Если матрица  $C'$  оказалась не приведённой по столбцам, то в каждом столбце ищется наименьший элемент  $\beta_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и осуществляется переход к матрице  $C''$ , элементы которой вычисляются

следующим образом:  $c''_{ij} = c'_{ij} - \beta_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Матрица по построению является приведённой.

### **Этап 2 (вычисление максимального числа независимых нулей)**

При вычислении максимального числа  $k$  независимых нулей в приведённой матрице необходимо воспользоваться следующим утверждением:

**Теорема 3 (теорема Кёнига).** Максимальное число независимых нулей равно минимальному суммарному числу горизонтальных и вертикальных линий (строк и столбцов), которыми можно зачеркнуть все нулевые элементы приведённой матрицы.

Отыскание независимых нулей осуществляется, вообще говоря, полным перебором всех возможных вариантов.

Для практической реализации этапа 2 существуют разные подходы. Так для задач небольшой размерности поиск можно организовать следующим образом: каждый раз выбирается строка (столбец) с наименьшим количеством нулей и вычёркиваются столбцы (строки), соответствующие нулям. Однако такой способ вычёркивания является неточным и при увеличении размерности матрицы может давать число линий больше минимально возможного значения.

Существуют и другие подходы к реализации перебора. Далее рассмотрим способ, который гарантированно находит как минимальное число линий вычёркивания, так и сами независимые нули. Он основан на интерпретации теоремы Кёнига в терминах теории графов.

Введём некоторые определения.

Граф  $G = (V, E)$  называется *двудольным*, если существуют множества его вершин  $X$  и  $Y$  такие, что  $X, Y \neq \emptyset$ ,  $X \cup Y = V$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , и всякое ребро графа  $G$  инцидентно некоторой вершине из  $X$  и некоторой вершине из  $Y$ . Множества  $X$  и  $Y$  называются *долями* графа  $G$ .

Паросочетанием в графе  $G$  будем называть множество его рёбер, попарно не имеющих общих вершин.

**Теорема 4 (теорема Кёнига в терминах теории графов):** число рёбер в максимальном паросочетании двудольного графа равно мощности его минимального вершинного покрытия.

Данная формулировка интерпретируется в матричном виде следующим образом: строки приведённой матрицы назначений соответствуют вершинам левой доли двудольного графа, а столбцы – вершинам правой доли. Нулям матрицы отвечают рёбра в двудольном графе.

Таким образом, чтобы найти независимые нули в матрице назначений, по теореме Кёнига следует найти максимальное паросочетание соответствующего двудольного графа.

Рассмотрим следующий **алгоритм поиска максимального паросочетания в двудольном графе:**

1. По заданной матрице затрат  $C$  построить двудольный граф по правилу: дуга  $(i, j)$  существует, если  $c_{ij} = 0$ . Добавить в граф две вершины: источник  $s$  и сток  $t$ . Добавить дуги, идущие из источника во все вершины левой доли графа, и дуги, идущие из всех вершин правой доли графа в сток.
2. Найти путь из  $s$  в  $t$ . Все дуги, входящие в найденный путь, поменять на обратные. Удалить дуги, выходящие из источника  $s$  и входящие в сток  $t$ .
3. Прямые дуги найденного пути добавляются в решение, обратные дуги из решения удалить. Если допустимые пути из  $s$  в  $t$  есть, то переход к шагу 2, иначе переход к шагу 4.
4. Записать ответ. Дуги, попавшие в решение, соответствуют независимым нулям в матрице  $C$ .

В результате работы алгоритма будут найдены независимые нули в приведённой матрице затрат. Однако для дальнейшей работы венгерского метода, а именно, для реализации этапа 3, необходимо знать не только

количество независимых нулей, но и горизонтальные и вертикальные линии, которыми зачеркнуты все нулевые элементы приведённой матрицы. Для этого воспользуемся следующим алгоритмом.

***Алгоритм вычёркивания независимых нулей.***

1. Найти строку без независимых нулей. Пометить её.
2. В найденной строке выбрать ноль. Пометить соответствующий столбец.
3. В найденном столбце найти независимый ноль. Пометить соответствующую строку и т.д.

По данной схеме перебираются все строки, не содержащие независимых нулей. Помеченные на предыдущих этапах строки и столбцы не учитываются при поиске. В искомое вычёркивание помещаются все непомеченные строки и все помеченные столбцы.

***Этап 3 (получение новых нулей)***

Обозначим через  $(c''_{ij})^r$  элемент приведённой матрицы  $C''$ , зачёркнутый  $r$  раз ( $r = 0, 1, 2$ ) на этапе 2, и положим  $\alpha = \min(c''_{ij})^0$ , где минимум берётся по всем  $i, j$ , т.е. ищется наименьший из незачёркнутых элементов матрицы  $C''$ . Построим матрицу  $\bar{C}$ , проведя пересчёт элементов матрицы  $C''$  следующим образом:

$$a) (c''_{ij})^0 - \alpha = \bar{c}_{ij},$$

$$b) (c''_{ij})^1 = \bar{c}_{ij},$$

$$c) (c''_{ij})^2 + \alpha = \bar{c}_{ij}.$$

Такие преобразования являются следствием применения теоремы 1, согласно которой задача с новой матрицей  $\bar{C}$  оказывается эквивалентна исходной и, кроме того, элементы этой новой матрицы неотрицательны.

Переход к этапу 2.