

УДК 510(075.8)

ББК 22.1я73

Д79

Р е ц е н з е н т ы :

д-р физ.-мат. наук, проф. Челябинского государственного
университета *В.Е. Федоров*;

канд. физ.-мат. наук, проф. Магнитогорского государственного
университета *Т.К. Плышевская*;

доцент Магнитогорского государственного университета *Л.Н. Малышева*

Дубровский В.В.

Д79 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теория и приложения [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.В. Дубровский. – 2-е изд. стер. — М. : ФЛИНТА, 2020. — 180 с.

ISBN 978-5-9765-2197-1

Курс обыкновенных дифференциальных уравнений является одним из важных разделов современной математики и имеет большое значение в современном математическом образовании. Данное учебное пособие посвящено вопросам существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения вида $y' = f(x, y)$, зависимости решения от параметров, интегрированию некоторых уравнений первого и n -го порядка в квадратурах. Рассматриваются методы нахождения аналитических решений систем линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами. Пособие содержит большое число подробно решенных примеров различного уровня сложности, что способствует глубокому усвоению теории.

Для студентов университетов математических и физических факультетов.

УДК 510(075.8)

ББК 22.1я73

ISBN 978-5-9765-2197-1

© Издательство «ФЛИНТА», 2015

© Дубровский В.В., Кадченко С.И.,
Дубровский В.В., 2015, 2015

Содержание

| | |
|--|-----------|
| Глава 1. Задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям | 3 |
| §1.1. Основные понятия: общее решение, частное решение, общий интеграл, особое решение, задача Коши | 3 |
| §1.2. Распространение теплоты в стержне | 5 |
| §1.3. Кривая постоянной кривизны | 7 |
| §1.4. Движение свободно падающего тела в пустоте | 8 |
| §1.5. Изгиб строительных колонн | 9 |
| §1.6. Колебания струны. Краевые задачи | 10 |
| §1.7. Геодезические кривые на поверхности, заданной в виде графика $z = f(x, y)$ | 13 |
| Глава 2. Общие теоремы о решениях дифференциальных уравнений первого порядка | 15 |
| §2.1. Теорема Пеано о существовании решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ | 15 |
| §2.2. Продолжение решений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ | 22 |
| §2.3. Теорема Оsgуда о единственности решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ | 24 |
| §2.4. Принцип сжимающих отображений | 25 |
| §2.5. Теорема о неявной функции | 28 |
| §2.6. Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной | 29 |
| §2.7. Гладкость решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в зависимости от функции $f(x, y)$ | 30 |
| §2.8. Теорема Коши об аналитичности решения дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y)$ | 30 |
| §2.9. Зависимость решения от параметров | 33 |
| §2.10. Особые точки | 37 |
| Глава 3. Интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в квадратурах | 39 |
| §3.1. Дифференциальное уравнение $y' = f(x)$ | 39 |
| §3.2. Дифференциальное уравнение $y' = f(y)$ | 40 |
| §3.3. Уравнение с разделяющимися переменными | 42 |
| §3.4. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Особые решения. Свойство интегральных кривых однородного уравнения | 43 |
| §3.5. Дифференциальные уравнения, сводимые к однородным | 44 |
| §3.6. Обобщенно однородное уравнение | 47 |
| §3.7. Дифференциальные уравнения, разрешимые относительно x или y | 48 |
| §3.8. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка | 49 |
| §3.9. Дифференциальное уравнение Бернулли | 51 |
| §3.10. Дифференциальное уравнение Якоби | 52 |
| §3.11. Дифференциальное уравнение Риккати | 55 |
| §3.12. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Простейшие способы нахождения интегрирующего множителя | 63 |

| | |
|--|------------|
| §3.13. Дифференциальные уравнения Клеро и Лагранжа | 68 |
| §3.14. Особые решения и огибающие множества кривых | 70 |
| §3.15. Ортогональные и изогональные траектории | 73 |
| §3.16. Дифференциальное уравнение Бесселя. Простейшие свойства цилиндрических функций. Сведение некоторых дифференциальных уравнений к уравнению Бесселя | 75 |
| Глава 4. Системы дифференциальных уравнений | 87 |
| §4.1. Нормальные системы дифференциальных уравнений | 87 |
| §4.2. Общее и особое решения | 89 |
| §4.3. Интегралы нормальных систем | 92 |
| §4.4. Симметричные системы дифференциальных уравнений | 97 |
| §4.5. Общие интегралы симметричных систем | 98 |
| Глава 5. Дифференциальные уравнения n-го порядка | 100 |
| §5.1. Понятие дифференциального уравнения n -го порядка и его решения | 100 |
| §5.2. Общие теоремы о решении уравнений | 101 |
| §5.3. Общее, частное, особое решения | 103 |
| §5.4. Дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) - f(x) = 0$ | 105 |
| §5.5. Уравнение вида $f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ | 106 |
| §5.6. Уравнение вида $f(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ | 109 |
| §5.7. Уравнение вида $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, где функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ однородна относительно аргументов $y, y', \dots, y^{(n)}$ | 111 |
| §5.8. Обобщенно-однородное уравнение | 113 |
| §5.9. Уравнение в точных производных | 115 |
| Глава 6. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка | 116 |
| §6.1. Теорема существования и единственности | 116 |
| §6.2. Фундаментальные системы решений | 120 |
| §6.3. Вронскиан. Формула Лиувилля-Остроградского. | 123 |
| §6.4. Построение линейного дифференциального уравнения по фундаментальной системе функций | 127 |
| §6.5. Понижение порядка линейного дифференциального уравнения | 128 |
| §6.6. Метод Лагранжа решения неоднородного линейного дифференциального уравнения | 130 |
| §6.7. Метод Коши решения неоднородного линейного дифференциального уравнения | 134 |
| Глава 7. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами | 136 |
| §7.1. Однородное и неоднородное линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами | 136 |
| §7.2. Алгоритм решения однородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами | 136 |
| §7.3. Линейные дифференциальные уравнения Эйлера | 139 |
| §7.4. Метод неопределенных коэффициентов отыскания частных решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами | 142 |
| §7.5. Некоторые приложения линейных дифференциальных урав- нений к колебательным процессам | 145 |

| | |
|---|------------|
| Глава 8. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка | 149 |
| §8.1. Алгебраические свойства решений однородной системы . . . | 149 |
| §8.2. Фундаментальная система решений. Формула Лиувилля – Остроградского | 152 |
| §8.3. Построение однородной линейной системы по фундаментальной системе решений | 157 |
| §8.4. Неоднородная линейная система | 158 |
| Глава 9. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами | 162 |
| §9.1. Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами | 162 |
| §9.2. Простейшие типы точек покоя | 166 |
| §9.3. Матричная экспонента | 170 |
| Список литературы | 176 |