

УДК 510(075.8)  
ББК 22.1я73  
Д79

Р е ц е н з е н т ы :

д-р физ.-мат. наук, проф. Челябинского государственного  
университета *В.Е. Федоров*;  
канд. физ.-мат. наук, проф. Магнитогорского государственного  
университета *Т.К. Плышевская*;  
доцент Магнитогорского государственного университета *Л.Н. Малышева*

**Дубровский В.В.**  
Д79 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теория и приложения [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, В.В. Дубровский. – 2-е изд. стер. — М. : ФЛИНТА, 2020. — 180 с.

ISBN 978-5-9765-2197-1

Курс обыкновенных дифференциальных уравнений является одним из важных разделов современной математики и имеет большое значение в современном математическом образовании. Данное учебное пособие посвящено вопросам существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения вида  $y' = f(x, y)$ , зависимости решения от параметров, интегрированию некоторых уравнений первого и  $n$ -го порядка в квадратурах. Рассматриваются методы нахождения аналитических решений систем линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами. Пособие содержит большое число подробно решенных примеров различного уровня сложности, что способствует глубокому усвоению теории.

Для студентов университетов математических и физических факультетов.

УДК 510(075.8)  
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-9765-2197-1

© Издательство «ФЛИНТА», 2015  
© Дубровский В.В., Кадченко С.И.,  
Дубровский В.В., 2015, 2015

# Содержание

<b>Глава 1. Задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям</b>	<b>3</b>
§1.1. Основные понятия: общее решение, частное решение, общий интеграл, особое решение, задача Коши . . . . .	3
§1.2. Распространение теплоты в стержне . . . . .	5
§1.3. Кривая постоянной кривизны . . . . .	7
§1.4. Движение свободно падающего тела в пустоте . . . . .	8
§1.5. Изгиб строительных колонн . . . . .	9
§1.6. Колебания струны. Краевые задачи . . . . .	10
§1.7. Геодезические кривые на поверхности, заданной в виде графика $z = f(x, y)$ . . . . .	13
<b>Глава 2. Общие теоремы о решениях дифференциальных уравнений первого порядка</b>	<b>15</b>
§2.1. Теорема Пеано о существовании решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ . . . . .	15
§2.2. Продолжение решений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ . . . . .	22
§2.3. Теорема Осгуда о единственности решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ . . . . .	24
§2.4. Принцип сжимающих отображений . . . . .	25
§2.5. Теорема о неявной функции . . . . .	28
§2.6. Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной . . . . .	29
§2.7. Гладкость решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в зависимости от функции $f(x, y)$ . . . . .	30
§2.8. Теорема Коши об аналитичности решения дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y)$ . . . . .	30
§2.9. Зависимость решения от параметров . . . . .	33
§2.10. Особые точки . . . . .	37
<b>Глава 3. Интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в квадратурах</b>	<b>39</b>
§3.1. Дифференциальное уравнение $y' = f(x)$ . . . . .	39
§3.2. Дифференциальное уравнение $y' = f(y)$ . . . . .	40
§3.3. Уравнение с разделяющимися переменными . . . . .	42
§3.4. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Особые решения. Свойство интегральных кривых однородного уравнения . . . . .	43
§3.5. Дифференциальные уравнения, сводимые к однородным . . . . .	44
§3.6. Обобщенно однородное уравнение . . . . .	47
§3.7. Дифференциальные уравнения, разрешимые относительно $x$ или $y$ . . . . .	48
§3.8. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка . . . . .	49
§3.9. Дифференциальное уравнение Бернулли . . . . .	51
§3.10. Дифференциальное уравнение Якоби . . . . .	52
§3.11. Дифференциальное уравнение Риккати . . . . .	55
§3.12. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Простейшие способы нахождения интегрирующего множителя . . . . .	63

§3.13. Дифференциальные уравнения Клеро и Лагранжа . . . . .	68
§3.14. Особые решения и огибающие множества кривых . . . . .	70
§3.15. Ортогональные и изогональные траектории . . . . .	73
§3.16. Дифференциальное уравнение Бесселя. Простейшие свойства цилиндрических функций. Сведение некоторых дифференциальных уравнений к уравнению Бесселя . . . . .	75
<b>Глава 4. Системы дифференциальных уравнений</b>	<b>87</b>
§4.1. Нормальные системы дифференциальных уравнений . . . . .	87
§4.2. Общее и особое решения . . . . .	89
§4.3. Интегралы нормальных систем . . . . .	92
§4.4. Симметричные системы дифференциальных уравнений . . . . .	97
§4.5. Общие интегралы симметричных систем . . . . .	98
<b>Глава 5. Дифференциальные уравнения <math>n</math>-го порядка</b>	<b>100</b>
§5.1. Понятие дифференциального уравнения $n$ -го порядка и его решения . . . . .	100
§5.2. Общие теоремы о решении уравнений . . . . .	101
§5.3. Общее, частное, особое решения . . . . .	103
§5.4. Дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) - f(x) = 0$ . . . . .	105
§5.5. Уравнение вида $f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ . . . . .	106
§5.6. Уравнение вида $f(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ . . . . .	109
§5.7. Уравнение вида $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , где функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ однородна относительно аргументов $y, y', \dots, y^{(n)}$ . . . . .	111
§5.8. Обобщенно-однородное уравнение . . . . .	113
§5.9. Уравнение в точных производных . . . . .	115
<b>Глава 6. Линейные дифференциальные уравнения <math>n</math>-го порядка</b>	<b>116</b>
§6.1. Теорема существования и единственности . . . . .	116
§6.2. Фундаментальные системы решений . . . . .	120
§6.3. Вронскиан. Формула Лиувилля-Остроградского. . . . .	123
§6.4. Построение линейного дифференциального уравнения по фундаментальной системе функций . . . . .	127
§6.5. Понижение порядка линейного дифференциального уравнения	128
§6.6. Метод Лагранжа решения неоднородного линейного дифференциального уравнения . . . . .	130
§6.7. Метод Коши решения неоднородного линейного дифференциального уравнения . . . . .	134
<b>Глава 7. Линейные дифференциальные уравнения <math>n</math>-го порядка с постоянными коэффициентами</b>	<b>136</b>
§7.1. Однородное и неоднородное линейные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	136
§7.2. Алгоритм решения однородного дифференциального уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	136
§7.3. Линейные дифференциальные уравнения Эйлера . . . . .	139
§7.4. Метод неопределенных коэффициентов отыскания частных решений неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	142
§7.5. Некоторые приложения линейных дифференциальных уравнений к колебательным процессам . . . . .	145

<b>Глава 8. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка</b>	<b>149</b>
§8.1. Алгебраические свойства решений однородной системы . . .	149
§8.2. Фундаментальная система решений. Формула Лиувилля – Остроградского . . . . .	152
§8.3. Построение однородной линейной системы по фундаментальной системе решений . . . . .	157
§8.4. Неоднородная линейная система . . . . .	158
<b>Глава 9. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами</b>	<b>162</b>
§9.1. Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	162
§9.2. Простейшие типы точек покоя . . . . .	166
§9.3. Матричная экспонента . . . . .	170
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>176</b>