Учебное издание

Сборник задач
для самостоятельного решения
по теме «Предел функции»

2-е издание, переработанное и дополненное

Составители: **Максименко** Александр Николаевич
Морозов Анатолий Николаевич

Редактор, корректор И.В. Бунакова
Компьютерная верстка А.Н. Максименко

Подписано в печать 23.04.2009. Формат 60х84/16.
Бумага тип. Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,0.
Тираж 150 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Отпечатано на ризографе.
Ярославский государственный университет.
150000, г. Ярославль, ул. Советская, 14.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра дискретного анализа

СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ»

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям
Прикладная информатика (в экономике),
Информационные технологии

Ярославль 2009

УДК 517
ББК В 161.5я73-4
С 23

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009 года

Рецензент
кафедра дискретного анализа ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Составители: А.Н. Максименко, А.Н. Морозов

С 23 **Сборник задач для самостоятельного решения по теме «Предел функции»** / сост. А.Н. Максименко, А.Н. Морозов; Яросл. гос. ун-т. — 2-е изд., перераб. и доп. — Ярославль: ЯрГУ, 2009. — 48 с.

Сборник содержит более 500 задач по темам «График функции», «Предел последовательности», «Предел функции», «Дифференцирование функции». На все вычислительные задачи даны ответы. Кроме того, сборник снабжен приложениями, содержащими справочный материал: графики основных элементарных функций и основные пределы.

Предназначен для студентов, обучающихся по специальностям 080801 Прикладная информатика (в экономике) и 010400 Информационные технологии (дисциплина «Математический анализ», блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 517
ББК В 161.5я73-4

Приложение 2

Основные формулы

Пределы последовательностей:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0\ (k>0)$; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\ (q<1)$;

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n n^k = 0\ (q<1)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a>0)$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0\ (a>1)$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, где $e = 2{,}718281828459\ldots$

Первый замечательный предел и его следствия:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел и его следствия:

$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$;

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$;

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$.

Таблица производных.

1. $c' = 0$.
2. $x' = 1$.
3. $(x^p)' = px^{p-1}$.
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
5. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. $(a^x)' = a^x \ln a$.
7. $(e^x)' = e^x$.
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.
9. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
10. $(\sin x)' = \cos x$.
11. $(\cos x)' = -\sin x$.
12. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
13. $(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.
14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
15. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
16. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
17. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

Графики гиперболических и обратных тригонометрических функций

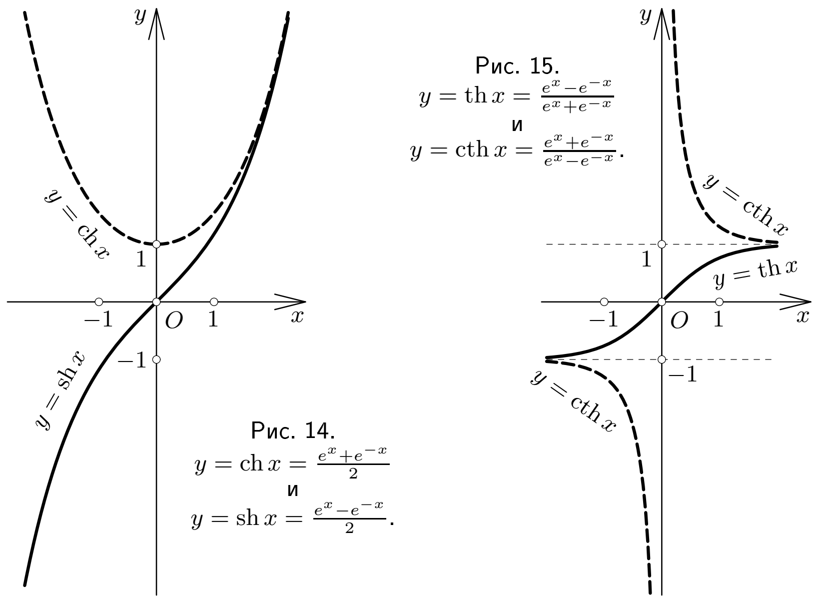


Рис. 14. $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Рис. 15. $y = \operatorname{th} x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ и $y = \operatorname{cth} x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

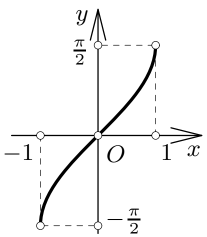


Рис. 16. $y = \arcsin x$

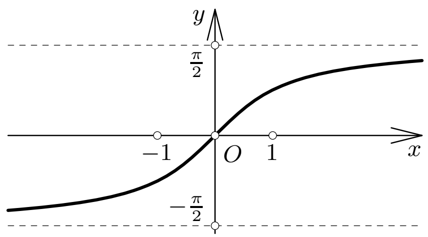


Рис. 18. $y = \operatorname{arctg} x$.

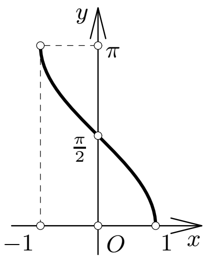


Рис. 17. $y = \arccos x$

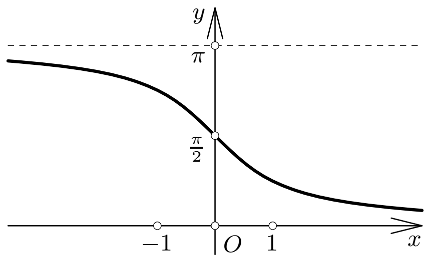


Рис. 19. $y = \operatorname{arcctg} x$.

Содержание

1 Графическое изображение функции

1. Понятие числовой функции. Пусть дано числовое множество $X \subset \mathbb{R}$, и пусть каждому $x \in X$ поставлено в соответствие число $y \in \mathbb{R}$; тогда говорят, что на множестве X определена *числовая функция*. Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторым символом, например f, и пишут

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

В этой записи x называют *аргументом* или независимой переменной; числа из множества X называют значениями аргумента; множество X называют *областью определения* функции, его обозначают также $D(f)$. Число y_0, соответствующее значению аргумента x_0, называют *значением функции* при $x = x_0$ (или значением функции в точке x_0). Множество всех значений функции f обозначается $E(f)$.

2. Свойства и графики функций.

1) *Графиком функции* $y = f(x)$, $x \in D(f)$, в прямоугольной системе координат Oxy называют множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in D(f)$.

2) *Четные и нечетные функции.* Функцию $y = f(x)$, определенную на симметричном относительно нуля множестве X, называют:
четной, если для любого $x \in X$ верно равенство

$$f(-x) = f(x);$$

нечетной, если для любого $x \in X$ верно равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

3) *Периодические функции.* Число $T \neq 0$ называют *периодом функции* f, если для любого $x \in D(f)$ выполнено

$$x + T \in D(f), \quad x - T \in D(f) \quad \text{и} \quad f(x+T) = f(x).$$

Такую функцию называют *периодической*.

График периодической функции с периодом T состоит из повторяющихся кусков. При этом для повторения может быть взята часть графика над любым отрезком $[a, b]$ таким, что $b - a = T$.

4) Исходя из графика функции $y = f(x)$, с помощью простых геометрических построений (см. рис. 1) можно получить графики следующих функций:

$y = f(x) + c$ — сдвиг вдоль оси ординат на c;
$y = f(x - c)$ — сдвиг вдоль оси абсцисс на c;
$y = f(-x)$ — симметрия относительно оси ординат;
$y = -f(x)$ — симметрия относительно оси абсцисс;
$y = af(x)$ — умножение каждой ординаты на a, где $a > 0$;
$y = f(ax)$ — деление каждой абсциссы на a, где $a > 0$.

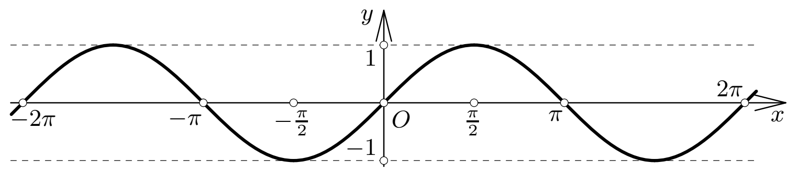


Рис. 8. Синусоида $y = \sin x$.

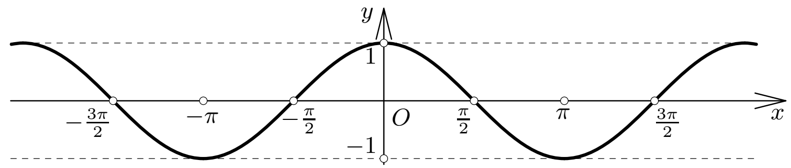


Рис. 9. Косинусоида $y = \cos x$.

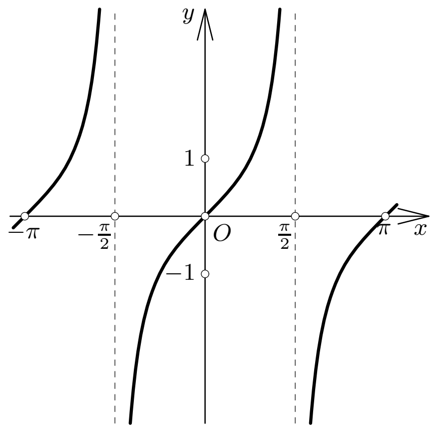


Рис. 10. Тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$.

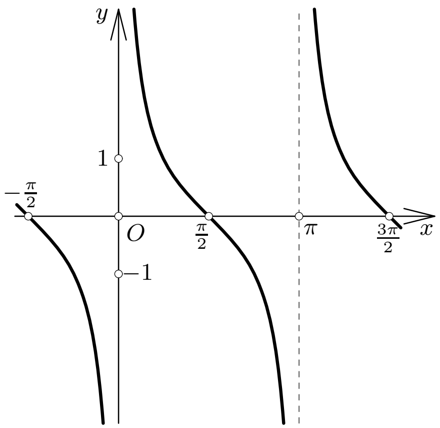
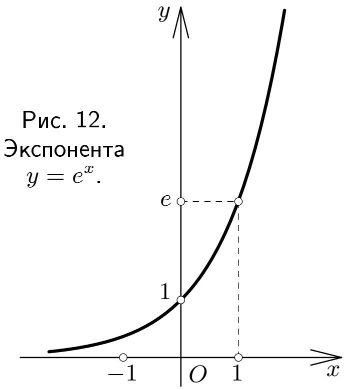


Рис. 11. Котангенсоида $y = \operatorname{ctg} x$.

Рис. 12. Экспонента $y = e^x$.



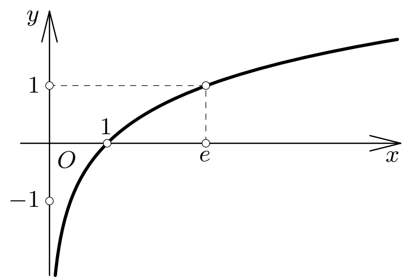


Рис. 13. Логарифмическая кривая $y = \ln x$.

Приложение 1

Графики некоторых функций

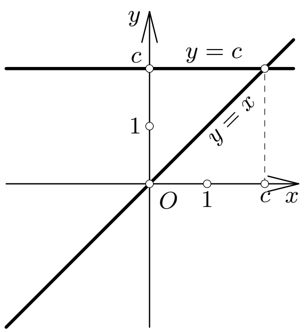


Рис. 1. Прямые $y = c$ и $y = x$.

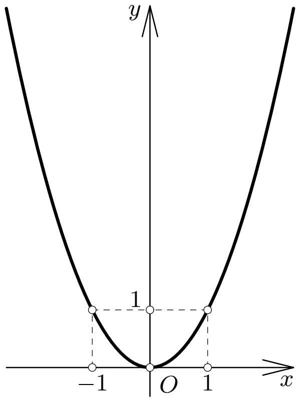


Рис. 2. Парабола $y = x^2$.

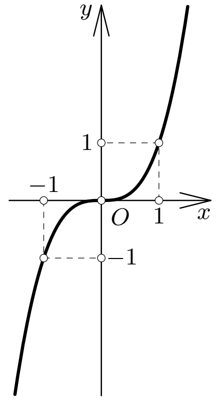


Рис. 3. Кубическая парабола $y = x^3$.

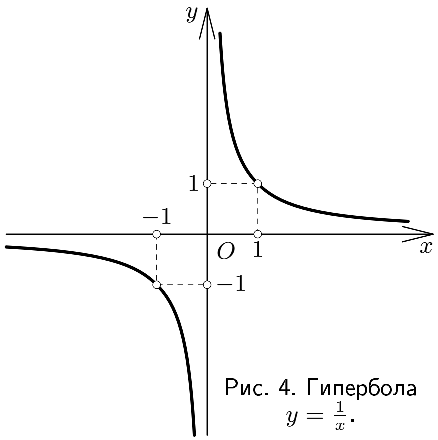


Рис. 4. Гипербола $y = \frac{1}{x}$.

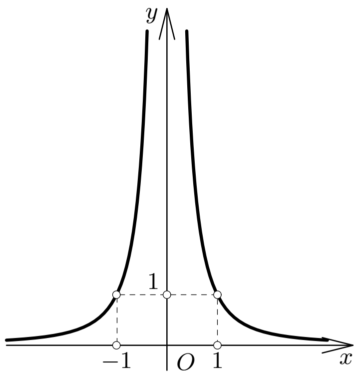


Рис. 5. График дробной функции $y = \frac{1}{x^2}$.

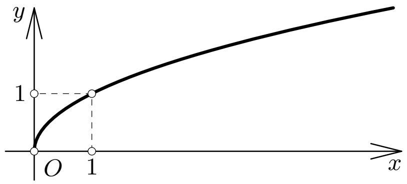


Рис. 6. Парабола (верхняя ветвь) $y = \sqrt{x}$.

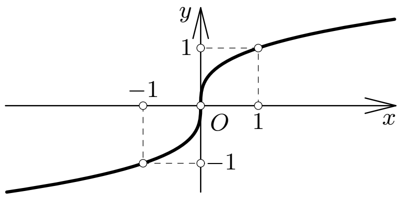


Рис. 7. Кубическая парабола $y = \sqrt[3]{x}$.

5) График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным относительно оси абсцисс отображением той части графика $y = f(x)$, которая лежит ниже этой оси; при этом часть графика, лежащая выше оси, остается без изменений (см. рис. 1).

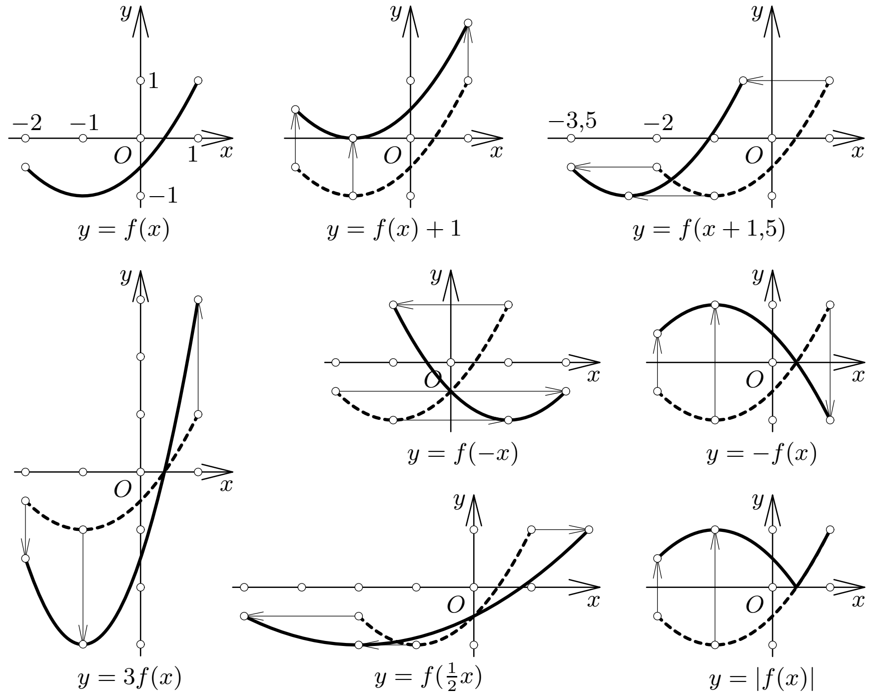


Рис. 1. Простые геометрические операции с графиком функции $y = f(x)$

Решение формулируемых далее задач существенно упрощается, если при построении графиков функций применять указанные геометрические преобразования к графикам основных элементарных функций (см. приложение I).

Построить графики линейных функций (*прямые линии*):

1. $y = kx$, для $k = 0,\ 1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1$. **2.** $y = x + b$, для $b = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

3. а) $y = 2x + 3$; б) $y = 2 - 0,1x$; в) $y = -\frac{x}{2} - 1$.

Построить графики функций 2-й степени (*параболы*):

4. $y = ax^2$, если $a = 1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1$. **5.** $y = x^2 + c$, если $c = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

6. $y = (x - x_0)^2$, если $x_0 = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.