МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А.А. Каменский, А.А. Некипелов, В.В. Чернушкин

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
Часть 2

Учебное пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɏè

Содержание

Для решения дифференциального уравнения (при $E = 0$) укажем заранее, что величины $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $omega$ положительны:

$--\!>$ `eq:subst([E=0,v='diff(s,t)],%);`

$--\!>$ `assume (sin(alpha)>0 and omega>0);`

$--\!>$ `ode2(eq, s, t);`

Ответив на вопрос Maxima про g: **positive**, получим ответ:

$$t = \frac{1}{\omega\sin\alpha}\ln\left(2\,\omega\sin\alpha\sqrt{s^2\omega^2\sin^2\alpha - 2\,s\,g\cos\alpha}+\right.$$

$$\left.+2\,s\,\omega^2\sin^2\alpha - 2\,g\cos\alpha\right) + const.$$

Задача 7.2

Определить отклонение от начальной плоскости движения для тела, брошенного с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$

Указание: считать ускорение свободного падения равным $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$, а угловую скорость вращения системы отсчета равной $\mathbf{\Omega} = \{-\Omega\cos\theta, 0, \Omega\sin\theta\}$, где θ – широта.

Решение.

$--\!>$ `load(vect);`

$--\!>$ `v:[vx,vy,vz]; g1:[0,0,-g];`

$--\!>$ `Omega1:[-Omega*cos(theta),0,Omega*sin(theta)];`

$--\!>$ `depends([vx,vy,vz],t);`

Уравнение движения частицы в равномерно вращающейся системе отсчета есть

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + 2m\left[\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}\right] + m\left[\mathbf{\Omega}\times\left[\mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}\right]\right]. \qquad (7.1)$$

Введем его в координатной форме, пренебрегая слагаемым, квадратичным по Ω:

$--\!>$ `eq[1]:m*diff(v[1],t)=m*g1[1]+2*m*express(v~Omega1)[1];`

$--\!>$ `eq[2]:m*diff(v[2],t)=m*g1[2]+2*m*express(v~Omega1)[2];`

$--\!>$ `eq[3]:m*diff(v[3],t)=m*g1[3]+2*m*express(v~Omega1)[3];`

Подставим dv_x/dt и dv_z/dt из первого и третьего уравнений во второе, продифференцировав каждую его часть по времени.

$--\!>$ `eliminate([eq[1],diff(eq[2],t),eq[3]],`
`[diff(vx,t),diff(vz,t)]);`

$--\!>$ `eqv:trigsimp(%[1])=0;`

Теперь дифференциальное уравнение содержит единственную проекцию скорости и допускает понижение степени (на запрос Maxima о знаке параметра введем nonzero):

$-->$ `ode2(eqv,vy,t);`

Рассматривая отклонение от начальной плоскости движения, положим в начальный момент времени $y = 0$, $v_y = 0$. Остальные начальные условия введем с учетом связи проекций скорости между собой:

$-->$ `ic2(%,t=0,vy=0,diff(vy,t)=2*(-Omega*cos(theta)`
`*v0z-Omega*sin(theta)*v0x));`

Поскольку данное приближение справедливо для малых величин Ω, то исключим слагаемые избыточной малости, убрав многоточие из ряда Тейлора командой **ratdisrep**

$-->$ `ratdisrep(ta);`
$-->$ `r:ratdisrep(taylor(%,Omega,0,1));`

$$v_y = \left[\left(gt^2 - 2v_{0z}t\right)\cos(\theta) - 2v_{0x}t\sin(\theta)\right]\Omega.$$

$-->$ `ode2('diff(y,t)=part(r,2),y,t);`
$-->$ `ic1(%,t=0,y=0);`
$-->$ `r:factor(%);`

Ответ:

$$y = -\Omega t^2\left[v_{0z}\cos\theta + v_{0x}\sin\theta - \frac{gt}{3}\right].$$

Замечание: при нулевой начальной скорости (например, тело падает в шахту), получаем кубическую зависимость от времени:

$$y = \frac{g\Omega t^3}{3}\cos(\theta).$$

Задача 7.3

Определить влияние, оказываемое вращением Земли на малые колебания математического маятника (маятник Фуко).

Решение.

Потенциальная энергия математического маятника равна $U = mgh$, причем

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

где l – длина нити.

$-->$ `z:sqrt(l^2-x^2-y^2);`
$-->$ `U:m*g*(l-z);`

ŋqdqȺeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ȼɔɑbɔȺ ɈqddɏqȺè

В дальнейшем потребуется разложение в ряды в символьном виде, поэтому свяжем производные координат со скоростями с помощью команды **gradef**:

```
--> gradef(x,t,vx); gradef(y,t,vy);
--> load(vect);
--> v:[diff(x,t),diff(y,t),diff(z,t)];
--> Omega:[Omegax,Omegay,Omegaz];
```

Сила, действующая на материальную точку маятника равна

$$\mathbf{F} = -gradU :$$

```
--> F:-ev(express(grad(U)),diff);
```

Подставим ее в уравнение движения (7.1), снова пренебрегая слагаемым, квадратичным по Ω. Запишем уравнение в координатной форме, ограничившись членами первого порядка малости:

```
--> m*'diff(v[1],t)=F[1]+2*m*express(v~Omega)[1];
--> eqx:ratdisrep(taylor(%,[x,y,vx,vy],0,1));
--> m*'diff(v[2],t)=F[2]+2*m*express(v~Omega)[2];
--> eqy:ratdisrep(taylor(%,[x,y,vx,vy],0,1));
```

Вернувшись к записи через производные, получим систему уравнений в виде

```
--> eq1:expand(subst([x=X(t),y=Y(t),
vx='diff(X(t),t),vy='diff(Y(t),t)],eqx/m));
--> eq2:expand(subst([x=X(t),y=Y(t),
vx='diff(X(t),t),vy='diff(Y(t),t)],eqy/m));
```

$$\left\{ \ddot{X}(t) = 2\Omega_z \dot{Y}(t) - \frac{g}{l} X(t), \quad \ddot{Y}(t) = -2\Omega_z \dot{X}(t) - \frac{g}{l} Y(t) \right\}.$$

Два уравнения легко сводятся к одному с помощью комплексной замены

$$\xi(t) = X(t) + iY(t),$$

для этого умножим (почленно) второе уравнение на мнимую единицу и сложим с первым:

```
--> subst(X(t)=xi(t)-%i*Y(t),eq1+%i*eq2);
--> ev(%,diff);
--> eq:expand(%);
```

$$\ddot{\xi}(t) = -2i\Omega_z \dot{\xi}(t) - \frac{g}{l} \xi(t).$$

```
--> ode2(eq,xi(t),t);
```

Ответив positive на вопрос Maxima о знаке величины $l(l\Omega_z^2+g)$, получим решение в виде

$$\xi(t)=\left[k_1\sin(\omega t)+k_2\cos(\omega t)\right]e^{-i\Omega_z t},$$

где

$$\omega=\sqrt{\Omega_z^2+\frac{g}{l}}\approx\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Множитель $e^{-i\Omega_z t}$ означает медленное вращение плоскости колебаний маятника.

8. Малые колебания

8.1. Собственные частоты колебаний

Задача 8.1

Закон гармонических колебаний задан в виде

$$x(t)=A\sin(\beta t)\left(\cos^2(\beta t)-\sin^2(\beta t)/3\right).$$

Найти положение равновесия, частоту и амплитуду колебаний.

Решение.

Для гармонических колебаний со смещенным положением равновесия x_{eq} можем записать

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2(x(t)-x_{eq}),\quad \frac{d^3x}{dt^3}=-\omega^2\frac{dx}{dt}.$$

Отсюда найдем частоту колебаний:

```
-->x:A*sin(beta*t)*(cos(beta*t)^2-sin(beta*t)^2/3);
-->factor(diff(x,t,3)/diff(x,t,1));
-->omega:sqrt(-%);
```

а затем и положение равновесия:

```
-->xeq:trigsimp(x+diff(x,t,2)/omega^2);
```

Амплитуду найдем по формуле

$$a=\sqrt{(x(t)-x_{eq})^2+(\dot{x}(t)/\omega)^2}: \tag{8.1}$$

```
-->a:sqrt(trigsimp((x-xeq)^2+diff(x,t)^2/omega^2));
```

Ответ:

$$\omega=3|\beta|,\quad x_{eq}=0,\quad a=|A|/3.$$

Задача 8.2

Решить предыдущую задачу для следующих функций $x(t)$:

а) $x(t) = A\sin(2\beta t) + B\sin^2(\beta t)$;

б) $x(t) = A\cos(\beta t + \delta_1) + B\cos(\beta t + \delta_2)$.

Указание: для автоматического разложения тригонометрических функций кратных аргументов использовать опцию **trigexpand** :

$-->$ `trigexpand:true;`

Ответ:

$$\text{а)}\quad \omega = 2|\beta|, \quad x_{eq} = B/2, \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + B^2},$$

$$\text{б)}\quad \omega = |\beta|, \quad x_{eq} = 0, \quad a = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\delta_2 - \delta_1)}.$$

Задача 8.3

Частица массы m совершает одномерное движение в поле

$$U(x) = U_0\cos(\alpha x) - F_0 x.$$

Получить условие, при котором могут возникнуть малые колебания и найти их частоту (U_0, α, F_0 – постоянные).

Решение.

Из условия экстремума потенциальной энергии найдем положение равновесия:

$-->$ `x0:part(solve(diff(U(x),x)=0,x)[1],2);`

Предупреждение ”solve: using arc-trig functions to get a solution. Some solutions will be lost.” означает, что в формуле на экране

$$-asin\left(\frac{F0}{\alpha U0}\right)/\alpha$$

не учтен знак $\pm$. Выберем далее знак таким, чтобы коэффициент колебаний k получился положительным, это обеспечивается добавлением модуля.

$-->$ `k:subst(x=x0,diff(U(x),x,2));`

$-->$ `omega:sqrt(ratsimp(abs(k))/m);`

Очевидно, результат применим только в случае положительного значения подкоренного выражения.

Ответ:

$$|F_0| < |U_0\alpha|, \qquad \omega = \sqrt{\frac{|\alpha|}{m}\sqrt{(U_0\alpha)^2 - F_0^2}}.$$