Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

*Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов*

ВЫПУСК 10



**Ярославль 2009**

УДК 517.9 + 512.54 + 519.6
ББК В1+Ч23
С 56

*Рекомендовано*
*редакционно-издательским советом ЯрГУ*
*в качестве научного издания. План 2009 года*

**Современные проблемы математики и информатики:**
С 56 Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль, 2009. — Вып. 10. — 84 с.

В сборнике представлены работы молодых ученых, аспирантов и студентов.

В статьях рассматриваются различные проблемы алгебры, качественной теории дифференциальных уравнений, аналитического и численного моделирования сложных систем.

Сборник подготовлен с использованием издательской системы LaTeX.

# Содержание

**А. С. Бобок**

# Локальный анализ простейших цепочек и решеток автогенераторов в опыте Скотта[1]

Исследована локальная динамика цепочки из $N$ связанных автогенераторов с туннельным диодом. Получены условия существования и устойчивости циклов и торов данной системы, выяснено, что при определенных значениях параметров существует $N$ устойчивых циклов.

Рассматриваются также две модельные решетки автогенераторов с различными условиями на границе. Для этих систем решена спектральная задача и найдены условия устойчивости однокомпонентных циклов. Сформулированы и обоснованы теоремы о максимальном количестве сосуществующих устойчивых режимов такого вида.

## 1. Постановка задачи

Основой для данной работы послужил эксперимент английского физика Э. Скотта [1], [2], [3], базирующийся на использовании двумерной решетки автогенераторов с полупроводниковыми туннельными диодами размером $4 \times 4$; все ячейки решетки предполагаются одинаковыми и имеющими вид, представленный на рис. 1. Считаем, что центр $O$ каждой такой ячейки связан с землей посредством параллельно подключенных конденсатора $C_0$, индуктивности $L_0$ и туннельного диода с нелинейной вольтамперной характеристикой $i = f(u)$, где функция $f(u)$ имеет вид $f(u) = -h^2G(u - u^3/3)$, $h$ — расстояние между точками $A$ и $B$, показанными на рис. 1, а $G$ — некоторый электрический параметр. Сами же ячейки взаимодействуют между собой через параллельно подсоединенные индуктивности $L$ и активные сопротивления $R$.

Дополнительный интерес исследованию результатов эксперимента Скотта придает возможность их дальнейшего практического применения в промышленной и информационной областях, а также тот факт, что предложенная им система может выступать одной из возможных моделей ассоциативной памяти.

В данной статье будут рассмотрены дискретные математические модели некоторых модификаций описанного выше эксперимента, которые мы получили, опираясь на приведенную в [4] подробную схему. Так, для цепочки из $N$ связанных автогенераторов была построена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial u_k}{\partial t} - \varepsilon\nu \frac{\partial}{\partial t} L u_k + u_k = L u_k - \varepsilon u_k^2 \frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad k = 1, \ldots, N. \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт № 02.740.11.0197).

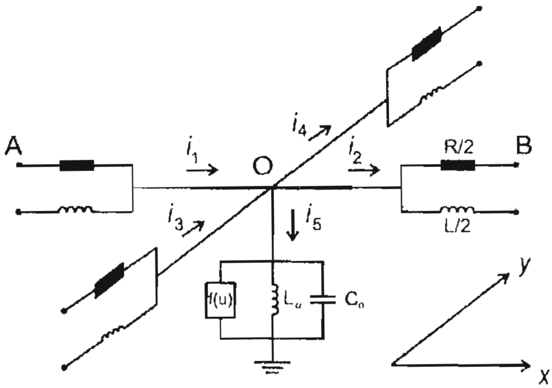


Рис. 1. Схема ячейки решетки Скотта

Здесь $Lu_k$ — разностный оператор вида $Lu_k = \delta^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$, $\varepsilon$ — малый параметр. При этом условия на границе взяты вида

$$u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0, \tag{2}$$

который означает, что первая и последняя ячейки в цепочке заземлены. Определению динамики системы (1), (2) будет посвящен следующий параграф. Также был рассмотрен разностный вариант классической решетки автогенераторов Скотта размером $4 \times 4$

$$\frac{\partial^2 u_{k,j}}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial u_{k,j}}{\partial t} - \varepsilon\nu\frac{\partial}{\partial t}Lu_{k,j} + u_{k,j} = Lu_{k,j} - \varepsilon u_{k,j}^2\frac{\partial u_{k,j}}{\partial t}, \quad k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4 \tag{3}$$

с условиями на границе типа Неймана

$$u_{0,j} = u_{1,j}, \quad u_{4,j} = u_{5,j}, \quad u_{k,0} = u_{k,1}, \quad u_{k,4} = u_{k,5}, \quad k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4, \tag{4}$$

физический смысл которых состоит в том, что все граничные ячейки рассматриваемого массива находятся в свободном положении, и Дирихле

$$u_{0,j} = 0, \quad u_{5,j} = 0, \quad u_{k,0} = 0, \quad u_{k,5} = 0, \quad k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4, \tag{5}$$

в свою очередь означающими, что все стороны граничного прямоугольника заземлены. Здесь разностный оператор $Lu_{k,j}$ имеет вид $Lu_{k,j} = \delta_1^2(u_{k+1,j} -$