

А  
01970  
С56

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

*Сборник научных трудов  
молодых ученых, аспирантов и студентов*

ВЫПУСК 10

ЯрГУ



1 010001 040522



ОРК

Ярославль 2009

00312674

УДК 517.9 + 512.54 + 519.6

ББК В1+423

С 56

*Рекомендовано  
редакционно-издательским советом ЯрГУ  
в качестве научного издания. План 2009 года*

**Современные проблемы математики и информатики:**

С 56 Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. — Ярославль, 2009. — Вып. 10. — 84 с.

В сборнике представлены работы молодых ученых, аспирантов и студентов.

В статьях рассматриваются различные проблемы алгебры, качественной теории дифференциальных уравнений, аналитического и численного моделирования сложных систем.

Сборник подготовлен с использованием издательской системы L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

**Редакционная коллегия:**

канд. физ.-мат. наук П. Н. Нестеров (отв. редактор)

д-р физ.-мат. наук С. Д. Глызин

д-р физ.-мат. наук А. Л. Онищик



© Ярославский  
государственный  
университет  
им. П. Г. Демидова, 2009

# Содержание

<i>Бобок А. С.</i> Локальный анализ простейших цепочек и решеток автогенераторов в опыте Скотта . . . . .	4
<i>Горчакова Е. В.</i> Динамика слабого симбиотического взаимодействия в системе близких видов . . . . .	14
<i>Егоров С. В.</i> Биологически мотивированная нейросетевая модель выделения краев изображений на основе вейвлетных преобразований . . . . .	20
<i>Коханова Е. А.</i> О точных последовательностях неабелевых когомологий . . . . .	28
<i>Кулакова Е. С.</i> Классификация комплексных супералгебр Ли малых размерностей . . . . .	36
<i>Мурин Д. М.</i> Реализация модели распространения прав доступа Take-Grant конечными автоматами . . . . .	51
<i>Сандуляк Д. В.</i> Численное исследование мультистабильности в модифицированном уравнении Свифта–Хоэнберга . . . . .	57
<i>Серебрякова А. В., Тараканова Е. В.</i> Вычисление собственных значений и собственных функций оператора Лапласа в «гантелеобразной» области . . . . .	65
<i>Солдатова Е. А.</i> Динамика взаимодействия осцилляторов типа ФитцХью–Нагумо с запаздывающей связью между ними . . . . .	71
<i>Хребтюгова О. А., Кубышкин Е. П.</i> Построение обобщенного решения одной начально-краевой задачи, возникающей в механике . . . . .	81

А. С. Бобок

## Локальный анализ простейших цепочек и решеток автогенераторов в опыте Скотта<sup>1</sup>

Исследована локальная динамика цепочки из  $N$  связанных автогенераторов с туннельным диодом. Получены условия существования и устойчивости циклов и торов данной системы, выяснено, что при определенных значениях параметров существует  $N$  устойчивых циклов.

Рассматриваются также две модельные решетки автогенераторов с различными условиями на границе. Для этих систем решена спектральная задача и найдены условия устойчивости однокомпонентных циклов. Сформулированы и обоснованы теоремы о максимальном количестве сосуществующих устойчивых режимов такого вида.

### 1. Постановка задачи

Основой для данной работы послужил эксперимент английского физика Э. Скотта [1], [2], [3], базирующийся на использовании двумерной решетки автогенераторов с полупроводниковыми туннельными диодами размером  $4 \times 4$ ; все ячейки решетки предполагаются одинаковыми и имеющими вид, представленный на рис. 1. Считаем, что центр  $O$  каждой такой ячейки связан с землей посредством параллельно подключенных конденсатора  $C_0$ , индуктивности  $L_0$  и туннельного диода с нелинейной вольтамперной характеристикой  $i = f(u)$ , где функция  $f(u)$  имеет вид  $f(u) = -h^2 G(u - u^3/3)$ ,  $h$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ , показанными на рис. 1, а  $G$  — некоторый электрический параметр. Сами же ячейки взаимодействуют между собой через параллельно подсоединенные индуктивности  $L$  и активные сопротивления  $R$ .

Дополнительный интерес исследованию результатов эксперимента Скотта придает возможность их дальнейшего практического применения в промышленной и информационной областях, а также тот факт, что предложенная им система может выступать одной из возможных моделей ассоциативной памяти.

В данной статье будут рассмотрены дискретные математические модели некоторых модификаций описанного выше эксперимента, которые мы получили, опираясь на приведенную в [4] подробную схему. Так, для цепочки из  $N$  связанных автогенераторов была построена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \epsilon \frac{\partial u_k}{\partial t} - \epsilon \nu \frac{\partial}{\partial t} L u_k + u_k = L u_k - \epsilon u_k^2 \frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт № 02.740.11.0197).

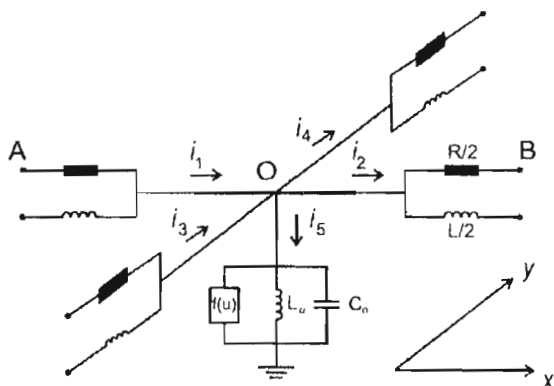


Рис. 1. Схема ячейки решетки Скотта

Здесь  $Lu_k$  — разностный оператор вида  $Lu_k = \delta^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$ ,  $\varepsilon$  — малый параметр. При этом условия на границе взяты вида

$$u_0 = 0, \quad u_{N+1} = 0, \quad (2)$$

который означает, что первая и последняя ячейки в цепочке заземлены. Определению динамики системы (1), (2) будет посвящен следующий параграф. Также был рассмотрен разностный вариант классической решетки автогенераторов Скотта размером  $4 \times 4$

$$\frac{\partial^2 u_{k,j}}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial u_{k,j}}{\partial t} - \varepsilon \nu \frac{\partial}{\partial t} Lu_{k,j} + u_{k,j} = Lu_{k,j} - \varepsilon u_{k,j}^2 \frac{\partial u_{k,j}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4$$

с условиями на границе типа Неймана

$$u_{0,j} = u_{1,j}, \quad u_{4,j} = u_{5,j}, \quad u_{k,0} = u_{k,1}, \quad u_{k,4} = u_{k,5}, \quad (4)$$

$$k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4,$$

физический смысл которых состоит в том, что все граничные ячейки рассматриваемого массива находятся в свободном положении, и Дирихле

$$u_{0,j} = 0, \quad u_{5,j} = 0, \quad u_{k,0} = 0, \quad u_{k,5} = 0, \quad (5)$$

$$k = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4,$$

в свою очередь означающими, что все стороны граничного прямоугольника заземлены. Здесь разностный оператор  $Lu_{k,j}$  имеет вид  $Lu_{k,j} = \delta_1^2(u_{k+1,j} -$