МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ КЛАССИЧЕСКОЙ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Часть I

Учебно-методическое пособие

Составитель
Я. А. Израилевич

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

Оглавление

проектов, облигации, роль процентных ставок. В третьем излагаются компьютерные аспекты практических приложений классической финансовой математики. В основном используется Microsoft Excel (или ее клон вроде LibreOffice Calc). Расчеты ведутся как с использованием встроенных финансовых функций, так и без них. Особое внимание уделяется повышению надежности получаемых результатов.

Как читать это пособие? Можно линейно, все разделы по порядку, пропуская при первом чтении то, что не кажется важным, и восполняя пропущенное по мере необходимости. А можно начать с третьего раздела, разбирая его тут же в Microsoft Excel, читая необходимые для понимания материалы из предшествующих разделов и выполняя предложенные упражнения.

В любом случае желаю Вам успеха!

Вторая часть пособия будет посвящена финансовой математике для задач в условиях неопределенности, главным образом, стохастической финансовой математике. Будут рассмотрены понятие риска, методы оптимизации в условиях неопределенности, математические модели операций на финансовых рынках, финансовая инженерия. Существенная часть пособия будет связана с компьютерными технологиями расчетов в соответствующих задачах.

Все совпадения с любыми другими текстами неслучайны. Все ошибки и неточности принадлежат автору. Автор заранее благодарен за все замечания.

1. ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Финансовая математика – математическая дисциплина, предоставляющая математический аппарат для практических финансовых расчетов и для экономической дисциплины – финансового анализа. Вместе с тем у финансовой математики есть собственные предмет, метод и история.

Финансовая математика занимается исследованием некоторых аспектов известного тезиса «Время – деньги!». Эти аспекты связаны с такими общеупотребительными вещами, как вклады (депозиты), кредиты, пенсии, а также с такими менее общеупотребительными, но всё же важными вещами, как облигации, акции, опционы и др.

Классическая финансовая математика занимается анализом соотношений между деньгами и временем в условиях определенности, т. е. не рассматривает возможности краха банка или исчезновения заемщика.

Стохастическая финансовая математика занимается как анализом соотношений между деньгами и временем при действии неопределенных и случайных факторов, так и анализом возникающих рисков.

Современные практические приложения финансовой математики опираются на компьютерные технологии.

Классическая финансовая математика – очень простая дисциплина. В XIX в. ее называли финансовой арифметикой. Злые языки говорят, что в классической финансовой математике нет ничего, кроме сложных процентов. Сейчас это, пожалуй, не совсем так, хотя, безусловно, формула сложных процентов лежит в основе классической финансовой математики.

Вместе с тем стоит отметить, что область применения классической финансовой математики широка и весьма важна. Это – депозиты, кредиты, облигации, пенсии негосударственных пенсионных фондов, анализ инвестиционных проектов и т. д. Цена конкретной ошибки в этих областях измеряется конкретной денежной суммой, а решения часто приходится принимать быстро. Поэтому для того, кто предполагает заниматься экономикой и финансами, важно уверенно ориентироваться в ситуациях, лежащих на стыке конкретных финансовых задач, конкретных математических моделей и конкретных компьютерных средств и методов. И никакие книги тут не помогут, если индивидуум не будет упражняться в решении конкретных задач, лежащих на вышеуказанном стыке (см. раздел 3).

1.1. Несколько простых примеров и терминология

Начнем с простых примеров и терминологии.

Пример 1.1.1. Пусть студент А положил в банк Б сумму P на депозит на 1 год при процентной ставке r, $r > 0$. Тогда через год банк Б выплатит студенту А сумму S, равную $P(1+ r)$. Можно сказать, что сумма P – сегодня – эквивалентна сумме $P(1 + r)$ – через год – при процентной ставке r. Процентную ставку r в данном случае измеряют в процентах за год (в процентах годовых). Коэффициент $(1+ r)$ называют ***коэффициентом наращения*** (за год), а обратную величину $1/(1 + r)$ – ***коэффициентом дисконтирования*** (за год). Величину $1/(1 + r)$ иногда представляют в виде $1 - d = 1/(1 + r)$, в этом случае d называют ***учетной ставкой***. Ясно, что $P = (1 - d)S$. На практике наращение (например, выплата дохода, большего номинальной начальной суммы вклада) выполняется в конце промежутка времени, а дисконтирование (дисконт – скидка, например от номинальной суммы векселя при покупке-продаже векселя) – в начале промежутка времени.

Пример 1.1.2. Пусть студент А положил в банк Б сумму P на депозит на 3 года при процентной ставке r, $r > 0$, измеренной в процентах годовых, и банк при определении дохода S использовал формулу простых процентов

$$S_{\text{А}} = P(1 + nr), \tag{1.1.1}$$

где $n = 3$ в данном случае.

Пусть другой студент В положил в банк Г такую же сумму P на депозит на 3 года при такой же процентной ставке r, измеренной в процентах годовых, но банк Г при определении дохода $S_{\text{В}}$ использовал формулу сложных процентов:

$$S_{\text{В}} = P(1 + r)^n, \tag{1.1.2}$$

где $n = 3$ в данном случае.

Заметим, что 1) $S_{\text{В}} > S_{\text{А}}$; 2) формула сложных процентов естественнее, чем формула простых процентов, так как учитывает возможность повторного инвестирования; 3) вычисления коэффициентов наращения (за n лет) по формуле сложных процентов чуть сложнее, чем по формуле простых процентов, но калькуляторы и персональные компьютеры эту разницу стерли.

Далее мы будем использовать формулу сложных процентов (если иное не оговорено явно).

Итак, можно сказать, что сумма P – сегодня – эквивалентна наращенной сумме $P(1+ r)^n$ – через n лет – при процентной ставке r. Соответственно, можно сказать, что сумма $S_{\text{В}}$ – через n лет – эквивалентна дисконтированной сумме $S/(1 + r)^n$ – сегодня – при процентной ставке r.

Более точно можно сказать, что денежные суммы $S(T)$ в момент T и $S(t)$ в момент t называются ***эквивалентными при процентной ставке*** r, если

$$S(T) = S(t)(1 + r)^{(T - t)}. \tag{1.1.3}$$

При $T > t$ это означает, что сумма $s(t)$, наращенная по ставке r (сложных процентов), превратится в момент T в сумму $S(T)$; однако можно считать, что T может быть и меньше t, тогда это означает, что сумма $S(T)$, наращенная по ставке r (сложных процентов), превратится в момент t в сумму $s(t)$. Формула (1.1.3) описывает оба эти случая. Очевидно, что можно сказать и по-другому: при $T > t$ эквивалентность сумм $S(T)$ и $s(t)$ означает, что сумма $S(T)$, уменьшающаяся при движении в прошлое за каждый единичный промежуток в $1/(1+\ r)$ раз, к моменту t превратится в точности в сумму:

$$S(t) = S(T) \Big/ \left[(1+\ r)^{(T-t)} \right]. \tag{1.1.4}$$

Такой пересчет будущей суммы к настоящему моменту называют ***приведением*** или нахождением ее ***современной величины***. Сама же математическая операция сравнения денежных сумм в любые моменты времени называется ***математическим дисконтированием***.

Пример 1.1.3. Пусть студент Д взял в банке Е кредит величины P сроком n лет по процентной ставке r, $r > 0$, измеренной в процентах годовых, с ежегодной выплатой равных величин C. Величина C определяется из условия эквивалентности в данный момент времени t_0 совокупности всех платежей величине кредита P при процентной ставке r, т. е. из равенства величины P, полученной в данный момент t_0, сумме результатов $C/(1+\ r)^k$ дисконтирования платежей C, совершенных через k лет от текущего момента t_0, где $k = 1,\ldots n$, т. е. из уравнения

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{(1+r)^k}, \tag{1.1.5}$$

что дает

$$C = P \Big/ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k}. \tag{1.1.6}$$

1.2. Поток платежей. Эквивалентность потоков

Мы приходим к понятию потока платежей и к понятию эквивалентности двух потоков.

Пусть в моменты времени 0, 1, …, N производятся платежи C_0, C_1, …, C_N . Числа C_k могут быть положительными, отрицательными и нолями. То, что мы отдаем, – отрицательно, а то, что мы получаем, – положительно (рис. 1.1–1.5). Такой объект называют ***потоком платежей***.

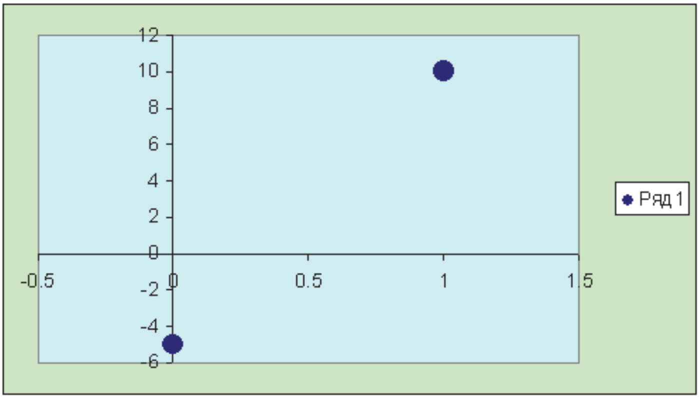

Рис. 1.1. Платежи операции депозита (вклада), диаграмма в Excel. Знак платежа указывает его направление (см. подразделы 1.2, 1.4)

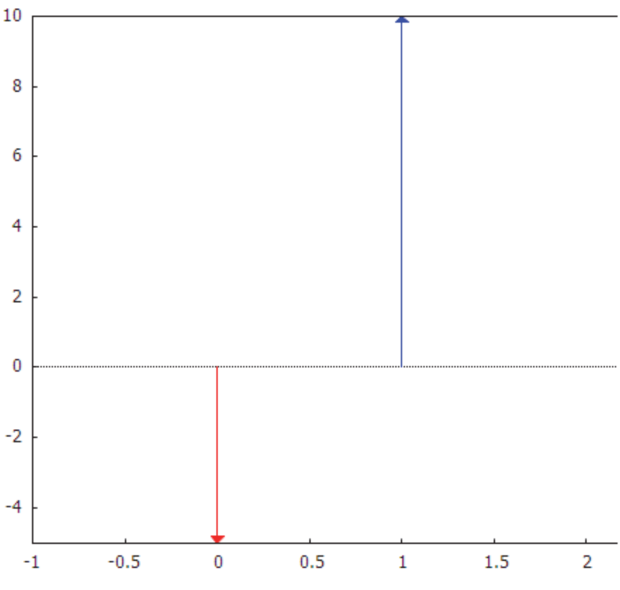

Рис. 1.2. Платежи операции депозита (вклада), те же платежи, что на рис. 1.1, рисунок в wxMaxima. Знак платежа указывает его направление (см. подразделы 1.2, 1.4)