

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

**А.И. Григорьев
С.О. Ширяева
А.Н. Жаров**

Нелинейные осцилляции заряженной капли

Ярославль 2006

УДК 532.59:534.1
ББК В 253.322я73
Г 83

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве научного издания. План 2006 года*

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, А.С. Голованов;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета

Григорьев, А.И. Нелинейные осцилляции заряженной капли :
Г 83 моногр. / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.Н. Жаров; Яросл. гос.
ун-т. им. П.Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 280 с.

ISBN 5-8397-0464-4

В монографии с единой точки зрения в рамках аналитического асимптотического моделирования рассмотрены нелинейные осцилляции заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости как в вакууме, так и при наличии внешней несжимаемой диэлектрической среды ламинарно обтекающего каплю потока и осложняющего влияния внешних силовых полей и вязкости жидкости.

Книга издана при финансовой поддержке грантов Президента РФ № МК-2946-2004-1 и МК-2209-2006-1, а также грантов РФФИ № 03-01-00760 и №06-01-00066-а.

УДК 532.59:534.1
ББК В 253.322я73

© Ярославский государственный
университет, 2006
© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева,
А.Н. Жаров, 2006

ISBN 5-8397-0464-4

1. Введение

Совсем недавно, два с половиной десятилетия назад (первая теоретическая статья [1] появилась 1983 году), начались регулярные исследования нелинейных осцилляций капель [1 – 33]. И хотя самая первая публикация [1] была посвящена исследованию нелинейных осцилляций незаряженной капли, во всех последующих работах [2 – 33] рассматривалась именно заряженная капля. Следует отметить, что экспериментальные и теоретические исследования устойчивости и динамики колебаний заряженных капель жидкости в линейном по амплитуде осцилляций приближении проводятся уже почти полтора столетия. Интерес к заряженной капле объясняется тем, что она является ключевым объектом в самых разнообразных академических, геофизических, технических и технологических явлениях и процессах. Например, с ней приходится встречаться при электростатическом распыливании жидких топлив, инсектицидов, лакокрасочных материалов, в устройствах электрокаплеструйной печати, при исследовании проблем грозового электричества, в капельной модели ядра атома, в жидкометаллических источниках ионов, в ионных коллоидных реактивных двигателях, при жидкометаллической литографии и эпитаксии, при получении порошков тугоплавких металлов и т.п. (см., например, обзоры [34 – 46] и указанную в них литературу).

Начало теоретического изучения капиллярных колебаний и устойчивости заряженной капли в линейном приближении по амплитуде осцилляций связано с именем Рэлея [47 – 48] и относится к концу девятнадцатого века. Он представил каплю как колебательную систему с бесконечным набором собственных частот колебаний. В качестве отдельных мод осесимметричных колебаний поверхности рассматривались колебания, описываемые соответствующими полиномами Лежандра, при этом номер моды соответствовал числу выпуклостей (или впадин) на поверхности капли. Рэлей рассчитал частоты капиллярных колебаний и нашел критические условия потери устойчивости сильно заряженной капли. Наименее устойчивой оказалась основная (вторая) мода капиллярных колебаний, критические условия потери устойчивости которой и определяют устойчивость всей капли. Величину заряда на капле фиксированного радиуса с заданным коэффициентом по-

верхностного натяжения, при которой теряет устойчивость основная мода, принято называть Рэлеевским пределом устойчивости заряженной капли. При превышении зарядом Рэлеевского предела капля неустойчива и у нее не существует равновесных сферических форм. Со времени появления работы Рэля проделана масса исследований линейной устойчивости капель в различных усложняющих вариантах, количество же публикаций, посвященных линейным исследованиям, измеряется сотнями (см., например, обзоры [34 – 46] и указанную в них литературу).

В нижеследующем изложении сосредоточимся на исследованиях нелинейных осцилляций заряженных капель [2 – 32, 49 – 51]. Можно выделить три основных направления проведенных исследований: 1) нелинейный анализ эволюции амплитуды капиллярных осцилляций поверхности капли в рамках методов теории возмущений; 2) расчет равновесных форм заряженных капель вблизи Рэлеевского предела и анализ характера бифуркаций решений, имеющих место в окрестности критического значения заряда; 3) исследование нелинейного взаимодействия между отдельными модами колебаний заряженной капли.

Впервые классические методы теории возмущений (метод Линштедта-Пуанкаре) к исследованию осесимметричных капиллярных колебаний конечной амплитуды, совершаемых поверхностью незаряженной капли несжимаемой невязкой жидкости, были применены в [1]. Это позволило получить квадратичные по амплитуде начальной деформации поправки к форме поверхности капли, потенциалам скоростей и в третьем порядке малости к частотам колебаний. Расчеты проводились для трех типов начальных условий, определявшихся заданием начальной деформации капли в виде виртуального возмущения n -й моды осцилляций для $n = 2, 3, 4$. При проведении экспериментальных исследований сдвига частоты при нелинейных колебаниях капли в условиях отсутствия силы тяжести [32] получено хорошее согласие данных измерений с теоретическими предсказаниями работы [1].

В работе [29] на основе более подходящего для исследования многочастотных колебаний метода многих масштабов были исследованы осцилляции конечной амплитуды заряженной капли идеальной несжимаемой жидкости, вызванные начальным возбуждением первых трех мод ($n = 2, 3, 4$), в ситуации когда заряд

капли не достигает Рэлеевского предела. Однако выяснилось, что при увеличении заряда до некоторого порогового зависящего от амплитуды осцилляций значения Q_* , меньшего критической по Рэлею величины, найденные в [29] поправки к амплитудам гармонических колебаний становятся несправедливыми, т.к. неограниченно нарастают при $Q \geq Q_*$. Для устранения таких расхождений в [32] на основе анализа асимптотического поведения решений, полученных в [29], малый параметр масштабирования вводился таким образом, чтобы он характеризовал соотношение между амплитудой деформации и отклонением величины заряда на капле Q от критического Q_* . Это позволило авторам [32] проанализировать нелинейную динамику осесимметричных осцилляций поверхности невязкой заряженной капли вблизи Рэлеевского предела и получить с точностью до второго порядка малости по величине решения, описывающие эволюцию формы капли, поля скоростей и электрического поля при начальном возбуждении основной моды колебаний поверхности.

Нелинейный анализ неосесимметричных колебаний капли, несущей заряд, мало отличающийся от Рэлеевского предела, математическими методами, использованными в [32], предпринят и в [24], где получены динамические уравнения для амплитуд неосесимметричных мод, описываемых сферическими функциями второго порядка. Решения выведенных в [24] уравнений в зависимости от величины начальной деформации капли и близости заряда к критическому значению проявляют тенденцию к стохастичности.

Нелинейная структура и устойчивость осесимметричных статических форм поверхности идеально проводящей заряженной невязкой капли с зарядом, близким к Рэлеевскому пределу, при начальном возбуждении основной ($n=2$) моды рассматривались в [32]. В частности было показано, что Рэлеевский предел соответствует точке транскритической бифуркации семейства статических сферических форм капли на семейства осесимметричных вытянутых и сплюснутых сфероидальных форм (этот результат был подтвержден численными расчетами [51]). Вытянутые формы существуют при значениях заряда, меньших критического, и неустойчивы по отношению к малоамплитудным возмущениям поверхности. Сплюснутые статические формы согласно проведенному анализу существуют при зарядах, больших Рэлеевского