ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517. 53

В.Г. РЯБЫХ, Г.Ю. РЯБЫХ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ЯВНОМ ВИДЕ ДЛЯ ШИРОКОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НАД ПРОСТРАНСТВОМ H_1

В работе найдены в явном виде экстремальные функции для широкого класса функционалов над пространством Харди H_1.

Ключевые слова: *пространство Харди, экстремальная функция, линейный функционал.*

Пусть ω – существенно ограниченная функция на $T=\{t:|t|=1\}$, и H_p – пространство Харди в единичном круге. Обозначим через l_ω линейный функционал над H_1, определяемый формулой (всюду в дальнейшем $t=e^{i\theta},\zeta=e^{i\varphi}$):

$$l_\omega(X)=\frac{1}{2\pi}\int_T X(t)\overline{\omega(t)}d\theta, X\in H_1^0, \omega\in L_\infty, \overline{\omega}\notin H_\infty. \qquad (1)$$

Здесь H_1^0 - множество функций из H_1, равных нулю в начале координат.

Назовем функцию $f\in H_1^0$ экстремальной функцией для функционала l, если $l(f)=\|l\|, \|f\|=1$. Будем считать $\chi\in H_\infty$ функцией наилучшего приближения для $\overline{\omega}\in L_\infty$, если

$$vrai\max\left\|\overline{\omega}(\zeta)-\chi(\zeta)\right\|_{L_\infty}=\inf_{a\in H_\infty} vrai\max\left\|\overline{\omega}(\zeta)-a(\zeta)\right\|_{L_\infty}=dist(\overline{\omega},H_\infty).$$

Известно, что экстремальная функция существует не у любого функционала над H_1, в то же время наилучшее приближение $\overline{\omega}$ реализуется всегда.

Старая проблема, стоящая со времен Э.Ландау (1916 год), заключается в том, чтобы найти условия существования и единственности экстремальной функции в пространстве H_1, а также указать эту функцию.

Первая часть задачи была решена одним из авторов в [1]. Экстремальные функции для функционала (1) с рациональными ω были найдены в [2].

В данной статье будут указаны экстремальные функции для $\omega\in Lip\alpha\cap H_\infty$.

Нам понадобятся следующие теоремы.

I. (ТЕОРЕМА 1 из [1])

Пусть $\Phi(\|\Phi\|_{H_2}=1)$ и $\Psi\in H_2$ *- решения системы уравнений:*

$$\begin{cases}\overline{\Phi(t)}=\lambda t\Psi(t)\overline{\omega}(t)+ta_1(t)\\ \overline{\Psi(t)}=\lambda t\Phi(t)\overline{\omega}(t)+ta_2(t)\end{cases} \text{для п.в. } t \text{ из } T. \qquad (2)$$