

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ
ХАНТЫ-МАНСКИЙСКОГО АВТОНОМНОГО ОКРУГА – ЮГРЫ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ХАНТЫ-МАНСКИЙСКОГО АВТОНОМНОГО ОКРУГА – ЮГРЫ
«СУРГУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н.В. Суханова, Г.Р. Прозорова

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Направления подготовки

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность Математика

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями)

Направленность Математика и Информатика,

Математика и Начальное образование

Уровень бакалавриата

Сургут, 2019

УДК 517.9 (076)
ББК 22.161.6я81
С 91

*Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
БУ «Сургутский государственный
педагогический университет»*

Рецензенты:

Далингер Виктор Алексеевич,
доктор педагогических наук, профессор
Омского государственного университета

Третьяков Сергей Анатольевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
БУ «Сургутского государственного педагогического университета»

Суханова, Н. В.

С 91 Типовые расчеты: дифференциальные уравнения : учеб.-метод. пособие. Направления подгот. 44.03.01 Педагогическое образование, направленность Математика, 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями), направленность Математика и Информатика, Математика и Начальное образование, уровень бакалавриата / Н. В. Суханова, Г. Р. Прозорова ; Департамент образования и молодеж. политики ХМАО – Югры, Бюджет. учреждение высш. образования ХМАО – Югры «Сургут. гос. пед. ун-т». – Сургут : РИО БУ «Сургутский государственный педагогический университет», 2019. – 173, [1] с.

В данное учебно-методическое пособие включены материалы для организации типовых расчетов студентов по дисциплине «Дифференциальные уравнения». Каждая тема имеет цель расчета, определено его содержание; подобраны краткие теоретические сведения, вопросы для самопроверки; сформулированы способы решения типовых задач; предложены варианты для индивидуальной (групповой) работы и решения типовых задач.

Предназначено для бакалавров направлений подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (направленность Математика), 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями) (направленность Математика и Информатика, Математика и Начальное образование).

**УДК 517.9 (076)
ББК 22.161.6я81**

© Суханова Н. В., Прозорова Г. Р., 2019

© БУ «Сургутский государственный педагогический университет», 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
МОДУЛЬ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	9
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 1.1. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ	10
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	12
САМОПРОВЕРКА	14
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	14
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	16
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	24
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	26
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 1.2. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	27
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	29
САМОПРОВЕРКА	29
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	30
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	31
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	37
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	41
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 1.3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.	
УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ	42
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	44
САМОПРОВЕРКА	46
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	46
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	48
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	54
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	59
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 1.4. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ	60
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	62
САМОПРОВЕРКА	63
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	64
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	65
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	71
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	73
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 1.5. УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ	
ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ	74
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	76
САМОПРОВЕРКА	78
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	78
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	80
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	85
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	86
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 1.6. ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ	
К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ	87
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	89
САМОПРОВЕРКА	90
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	91
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	92
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	100
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	102

МОДУЛЬ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	103
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 2.1. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА	104
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	106
САМОПРОВЕРКА	107
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	107
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	108
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	114
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	117
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	118
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	120
САМОПРОВЕРКА	121
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	121
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	123
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	128
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	130
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 2.3. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА	131
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	133
САМОПРОВЕРКА	134
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	134
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	136
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	140
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	142
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 2.4. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ	143
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	145
САМОПРОВЕРКА	145
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	146
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	147
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	151
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	152
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 2.5. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	153
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ	154
САМОПРОВЕРКА	155
СПОСОБЫ ДЕЙСТВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	155
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ	158
РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ	163
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	170
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	171
ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	172

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Дифференциальные уравнения» относится к вариативной части дисциплин основной профессиональной образовательной программы бакалавриата направлений подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (направленность «Математика»), 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями) (направленностей «Математика и Информатика», «Математика и Начальное образование»).

«Дифференциальные уравнения» – это дисциплина, которая раскрывает основные аналитические способы решения некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучение данной дисциплины должно проходить после освоения таких важных дисциплин как «Математический анализ» (разделов «производные» и «интегрирование») и «Алгебра» (решение систем линейных алгебраических уравнений, векторная алгебра). Данный курс содержит описание основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемых аналитически и, соответственно, методы их решения, а также обоснование методов и условия существования и единственности их решений.

Освоение данной дисциплины является необходимой базой для изучения ряда профессиональных предметов, написания курсовых работ и успешного прохождения учебных и производственных практик.

Цель дисциплины: формирование у обучающихся компетенций в области профессиональной педагогической деятельности, позволяющих изучить систему теоретических знаний и практических умений курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи дисциплины:

- формирование системы основных понятий и аксиоматики теории дифференциальных уравнений;
- формирования у обучающихся опыта математической деятельности в процессе решения дифференциальных уравнений;
- подготовка обучающихся к исследовательской деятельности в области математики.

Процесс изучения дисциплины для вышеуказанных направлений связан с формированием *профессиональных компетенций*, предусмотренных в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС 3+):

- готовность реализовывать образовательные программы по предмету в соответствии с требованиями образовательных стандартов (ПК-1);
- способность осуществлять взаимопереходы знаковых систем на вариативном уровне в процессе освоения математической деятельности (ПК-15).

В связи с введением нового ФГОС 3++ данное учебное пособие также поддерживает формирование профессиональных компетенций:

- способен реализовывать образовательные программы различных уровней в предметной области «Математика» в соответствии с современными методиками и технологиями, в том числе информационными, для обеспечения качества учебно-воспитательного процесса (ПКО-1);
- способность осуществлять взаимопереходы знаковых систем в процессе освоения математической деятельности (ПК-1).

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать:

- основные математические понятия и методы решения типовых задач, рассматриваемые в рамках дисциплины;
- сферы применения простейших базовых математических моделей в соответствующей профессиональной области;
- структуры обобщенных учебных действий, формируемых в процессе изучения дифференциальных уравнений;

уметь:

- применять систему основных структур дифференциальных уравнений;
- применять методы решения дифференциальных уравнений к типовым задачам;

владеть:

- основными теоремами и положениями теории дифференциальных уравнений;
- содержательной интерпретацией и адаптацией математических знаний для решения образовательных задач в соответствующей профессиональной области.

Трудоемкость курса составляет 3 зачетные единицы (108 ч.). Сроки изучения дисциплины определены на последний год обучения бакалавров.

Курс состоит из двух разделов: «Дифференциальные уравнения первого порядка», «Дифференциальные уравнения высших порядков».

Цель изучения раздела 1 «Дифференциальные уравнения первого порядка» – овладеть системой основных понятий и методов решения дифференциальных уравнений первого порядка. После изучения данного раздела обучающиеся будут уметь осуществлять анализ математических объектов и процедур в процессе изучения дифференциальных уравнений, уметь строить математические модели и осуществлять внутримodelьное решение задач с использованием дифференциальных уравнений первого порядка, оценивать полученное решение задачи, выявлять определяющие его параметры, интерпретировать его.

Раздел 2 «Дифференциальные уравнения высших порядков» раскрывает студентам аксиоматику и методологию решения дифференциальных уравнений высших порядков и систем дифференциальных уравнений. В результате изучения данного раздела студенты будут уметь осуществлять анализ математических объектов и процедур в процессе решения дифференциальных уравнений высших порядков и систем дифференциальных уравнений, уметь строить математические модели и осуществлять внутримodelьное решение задач, оценивать полученное решение задачи, выявлять определяющие его параметры, интерпретировать его.

Результаты изучения дисциплины представлены в следующей таблице.

Таблица

**Результаты изучения дисциплины
«Дифференциальные уравнения»**

<i>Когнитивный</i>	<i>Ориентировочный</i>	<i>Операциональный</i>	<i>Опыт</i>
<ul style="list-style-type: none"> • знает образовательный стандарт по алгебре и началам анализа, в том числе по дифференциальным уравнениям • знание основной терминологии, положений, правил символической записи дифференциальных уравнений 	<ul style="list-style-type: none"> • владеет содержанием разделов алгебры и начал анализа, в том числе дифференциальных уравнений для реализации образовательного стандарта • умение осуществлять логический анализ математических объектов и процедур в процессе изучения дифференциальных уравнений 	<ul style="list-style-type: none"> • умеет реализовывать образовательную программу по началам анализа, в том числе по разделу дифференциальных уравнений в соответствии с требованиями стандарта • умение выделить математические понятия в соответствии с решаемой задачей • умение выявлять обобщенные действия, осуществлять анализ и синтез математических объектов и процедур в процессе изучения дифференциальных уравнений • умение осуществлять перевод с естественного языка на математический, и наоборот при решении дифференциальных уравнений • умение оценивать корректность данных и условий при построении моделей с помощью дифференциальных уравнений • умение строить математические модели и осуществлять внутримодельное решение задач с использованием дифференциальных уравнений 	<ul style="list-style-type: none"> • опыт выявления обобщенных действий, осуществления анализа математических объектов и процедур в процессе изучения дифференциальных уравнений • опыт моделирования явлений и процессов с помощью дифференциальных уравнений • опыт решения учебных проблем с использованием математического языка и методов решения дифференциальных уравнений

Цель пособия – освоение обучающимися основных обобщенных способов действий, позволяющих решать аналитическими методами обыкновенные дифференциальные уравнения любых порядков, а также систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Типовые расчеты – это одна из форм обучения бакалавров для формирования математической деятельности, которые представляют собой сборник индивидуальных заданий по какому-либо разделу или теме из высшей математики.

В данном учебно-методическом пособии ставится задача формирования умений решать основные типы задач по дисциплине «Дифференциальные уравнения», которая представлена в разделах 1 и 2 данного курса.

Типовой расчет состоит из нескольких разделов. Каждый раздел типового расчета отмечен специальным значком для концентрации внимания обучающегося и обозначения границ перехода от одного раздела работы к последующему.



Краткие теоретические сведения

Раздел «Краткие теоретические сведения» содержит основные теоретические факты по изучаемой теме типового расчета.



Самопроверка

Каждый типовой расчет пособия сопровождается системой вопросов для самопроверки рассмотренных теоретических сведений.



Способы действий для решения задач

В заданиях типа «Способы действий для решения задач» обучающимся предлагаются обобщенные способы действия по теме типового расчета.



Варианты заданий

Раздел «Варианты заданий» содержит различные варианты задач по рассматриваемой теме, которые могут быть предложены обучающимся, как для индивидуального, так и для группового решения. Выполнение этих заданий свидетельствует о том, насколько обучающимися был усвоен тот или иной способ, и сформулировано умение его правильно применить к решению соответствующей задачи. Подобранные варианты заданий по теме дадут возможность обучающемуся проверить правильность выработанного способа действия и отработать умение самостоятельного решения упражнений, а также позволят оценить качество усвоения изученной темы и корректное использование разработанного способа действия.



Решение типовых заданий

Раздел «Решение типовых заданий» представлен различными задачами с решениями, которые предусматривают практическое применение изученного теоретического материала.

Представленное учебно-методическое обеспечение поможет обучающимся в изучении темы и выполнении типового расчета, при необходимости углубить и закрепить полученные знания.