

УДК 22.314
ББК 531:530.145
Р 187



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту №06-02-30048.

Райхл Линда Е.

Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. — 756 с.

Книга является одним из первых полных и систематических руководств по интенсивно развивающейся области науки, связанной с классическими и квантовыми динамическими системами, а также квантовым хаосом. Изложение начинается с обсуждения нелинейного резонанса, интегрируемости, теоремы Нетер, КАМ-теории и определения хаотического поведения. Затем подробно рассматриваются отображения, сохраняющие площадь, особое внимание при этом уделяется самоподобию, интегрируемым и неинтегрируемым квантовым системам, спектральным свойствам, интегралам по траектории и системам с периодической вынуждающей силой. В заключительной части показано, как эти идеи могут применяться к стохастическим системам. Для лучшего понимания текста в приложениях приводятся все необходимые математические сведения. Монография содержит многочисленные ссылки на современные научные публикации; в конце каждой главы представлены задачи, которые помогут лучше усвоить изложенные основные концепции и методы.

Книга предназначена для студентов, преподавателей и специалистов в области классического и квантового хаоса.

ISBN 978-5-93972-704-4

ББК 531:530.145

Translation from the English language edition:
The Transition to Chaos by Linda E. Reichl

© Springer-Verlag New York, Inc., 2004
Springer is a part of Springer Science+Business Media
All Rights Reserved

© Перевод на русский язык:
НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008

<http://shop.rcd.ru>
<http://ics.org.ru>

Оглавление

Благодарность	20
ГЛАВА 1. Обзор	21
1.1. Введение	21
1.2. Исторический очерк	22
1.3. Структура книги	29
1.4. Литература	34
ГЛАВА 2. Фундаментальные понятия	35
2.1. Введение	35
2.2. Стандартная теория возмущений	37
2.3. Интегрируемость	41
2.3.1. Теорема Нетер	42
2.3.2. Скрытые симметрии	45
2.3.3. Сечения Пуанкаре	48
2.4. Нелинейный резонанс и хаос	51
2.4.1. Однорезонансные гамильтонианы	51
2.4.2. Двухрезонансный гамильтониан	57
2.5. КАМ-теория	59
2.6. Определение хаоса	64
2.6.1. Показатель Ляпунова	64
2.6.2. Метрическая КС-энтропия и К-потoki	69
2.7. Зависящие от времени гамильтонианы	74
2.8. Выводы	81
2.9. Задачи	81
2.10. Литература	83
ГЛАВА 3. Сохраняющие площадь отображения	86
3.1. Введение	86
3.2. Закручивающие отображения	88
3.2.1. Построение закручивающего отображения из рас- смотрения тора	89

3.2.2.	Производящие функции	91
3.2.3.	Теорема Биркгофа о неподвижной точке	93
3.2.4.	Касательное отображение	93
3.2.5.	Гомоклинические и гетероклинические точки	96
3.3.	Расстояние Мельникова	101
3.4.	Отображения усов	104
3.5.	Стандартное отображение	108
3.5.1.	Рациональные и иррациональные орбиты	109
3.5.2.	Режим акселератора	116
3.6.	Скейлинг высших КАМ-торов	117
3.6.1.	Рациональные приближения	117
3.6.2.	Скейлинг-свойства закручивающих отображений	121
3.7.	Ренормализация в закручивающих отображениях	128
3.7.1.	Интегрируемое закручивающее отображение	128
3.7.2.	Неинтегрируемое закручивающее отображение	132
3.7.3.	Универсальное отображение	134
3.8.	Бифуркация M -циклов	136
3.8.1.	Общие положения	136
3.8.2.	Квадратичное отображение	137
3.8.3.	Скейлинг квадратичного отображения де Вогелара	139
3.9.	Кантор-торы	147
3.10.	Диффузия для двумерных закручивающих отображений	153
3.10.1.	Эффект кантор-тора	153
3.10.2.	Диффузия в стандартном отображении	159
3.11.	Выводы	163
3.12.	Задачи	165
3.13.	Литература	166
ГЛАВА 4. Глобальные свойства гамильтоновых систем		170
4.1.	Введение	170
4.2.	Важные модели	172
4.2.1.	Ротор, помещенный в дельтообразное поле (стандартное отображение)	173
4.2.2.	Осциллятор Дуффинга	175
4.2.3.	Частица под действием внешнего поля, находящаяся в потенциальной яме с бесконечными стенками	177
4.2.4.	Одномерный атом водорода, возбуждаемый внешней силой	178
4.3.	Ренормализующее преобразование	184
4.3.1.	Эталонный гамильтониан	185

4.3.2.	Ренормализующее преобразование	188
4.3.3.	Неподвижные точки ренормализующего отображения	192
4.4.	Приложения прогнозов ренормализации	197
4.4.1.	Возбуждаемая система с квадратной потенциальной ямой	197
4.4.2.	Осциллятор Дуффинга	200
4.5.	Хаос при рассеивании	202
4.6.	Стохастическая мозаика	207
4.6.1.	Гармонический осциллятор, возбуждаемый дельта- функцией	207
4.6.2.	Модель двух первичных резонансов	209
4.7.	Диффузия Арнольда	211
4.7.1.	Резонансные сети	211
4.7.2.	Численные наблюдения	215
4.7.3.	Диффузия по слоям сепаратрис	217
4.7.4.	Коэффициент диффузии	221
4.7.5.	Некоторые приложения	224
4.8.	Выводы	227
4.9.	Задачи	228
4.10.	Литература	229
ГЛАВА 5.	Теория случайных матриц	231
5.1.	Введение	231
5.2.	Ансамбли	234
5.2.1.	Гауссовы ансамбли	236
5.2.2.	Круговые ансамбли	239
5.3.	Кластерные функции	240
5.3.1.	Кластерное разложение плотностей распределения	240
5.3.2.	Вероятностные плотности и кватернионный опреде- литель	242
5.3.3.	Кластерные функции для гауссовых ансамблей	244
5.3.4.	Кластерные функции для круговых ансамблей	246
5.4.	Плотность числа собственных значений	247
5.4.1.	Плотность числа собственных значений для гауссо- вых ансамблей	248
5.4.2.	Плотность числа собственных значений для круговых ансамблей	255
5.5.	Корреляции собственных значений — Δ_3 -статистика	255
5.5.1.	Δ_3 -статистика: общие представления	256
5.5.2.	Δ_3 -статистика для гауссовых ансамблей	260

5.5.3.	Δ_3 -статистика для круговых ансамблей	266
5.6.	Распределение расстояний между соседними собственными значениями для ГОА	270
5.6.1.	Распределение расстояний между соседними собственными значениями ($N = 2$)	271
5.6.2.	Распределение расстояний между соседними собственными значениями в пределе $N \rightarrow \infty$	273
5.6.3.	Аппроксимация распределения расстояний между соседними уровнями для ГОА ($N \rightarrow \infty$)	275
5.7.	Статистика собственных векторов — гауссовы ансамбли	276
5.7.1.	Общие сведения	278
5.7.2.	Распределение компонент собственного вектора (ГОА)	281
5.7.3.	Распределение компонент собственного вектора (ГУА)	282
5.7.4.	Гауссов симплектический ансамбль	283
5.8.	Выводы	284
5.9.	Задачи	285
5.10.	Литература	285
ГЛАВА 6.	Связные квантовые системы	287
6.1.	Введение	287
6.2.	Квантовая интегрируемость	290
6.3.	Симметрии и вырождения	293
6.4.	Квантовые бильярды	298
6.4.1.	Прямоугольный бильярд	298
6.4.2.	«Стадион»	301
6.4.3.	Бильярд Синая	308
6.4.4.	Гофрированный бильярд	310
6.5.	Квантованное отображение пекаря	315
6.6.	Средняя по времени величина как инвариант	321
6.7.	Интегрируемые и неинтегрируемые системы со спином	324
6.7.1.	Классические спиновые модели	324
6.7.2.	Квантовые спиновые модели	331
6.7.3.	Двумерные кластеры с $N \frac{1}{2}$ -спиновыми ячейками	334
6.8.	Ангармонические осцилляторы	336
6.8.1.	Полиномиальная ангармоничность	336
6.8.2.	Связные осцилляторы Морзе	337
6.9.	Выводы	341
6.10.	Задачи	343
6.11.	Литература	344

ГЛАВА 7. Проявления хаоса в квантовых процессах рассеяния . . .	348
7.1. Введение	348
7.2. Теория рассеяния	352
7.2.1. Гамильтониан	354
7.2.2. Собственные функции гамильтониана	357
7.2.3. Матрица взаимодействия	358
7.2.4. Матрица рассеяния	361
7.3. Времена задержки Вигнера–Смита и парциальные времена задержки	367
7.3.1. Времена задержки волнового пакета	368
7.3.2. Времена задержки в многоканальном рассеянии	369
7.3.3. Времена задержки и комплексные полюса	371
7.4. Теория рассеяния и ГОА	374
7.4.1. Усредненная S -матрица	376
7.4.2. Следует ли КОА S -матрица из ГОА гамильтониана? . .	377
7.4.3. Корреляционные функции S -матрицы (ГОА)	382
7.4.4. Плотность времени задержки	386
7.5. Коррелятор S -матрицы (КОА)	387
7.6. Функции Грина и S -матрица	390
7.6.1. Функция Грина	391
7.6.2. Функции Грина для квантового волновода	392
7.6.3. Амплитуда пропускания и функция Грина	393
7.7. Спектр поглощения и функция Грина	397
7.8. Экспериментальные проверки предсказаний TSM	400
7.8.1. Эксперименты по статистике спектров ядерных уровней	400
7.8.2. Эксперименты по статистике спектров молекулярных уровней	403
7.9. Заключение	405
7.10. Задачи	406
7.11. Литература	407
ГЛАВА 8. Квазиклассическая теория — интегралы по путям . . .	410
8.1. Введение	410
8.2. Функция Грина и плотность состояний	412
8.3. Интеграл по путям	413
8.3.1. Общий случай, $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$	414
8.4. Квазиклассическое приближение	417
8.4.1. Метод стационарной фазы	417
8.4.2. Квазиклассическая функция Грина	418
8.4.3. Сопряженные точки	423

8.5.	Энергетическая функция Грина	425
8.5.1.	Общее выражение	426
8.5.2.	Плотность состояний	433
8.6.	Δ_3 -спектр прямоугольного бильярда	437
8.6.1.	Энергетическая функция Грина для прямоугольного бильярда	437
8.6.2.	Плотность энергетических уровней прямоугольного бильярда	439
8.6.3.	Квазиклассическое выражение для Δ_3 -распределения	443
8.7.	Формула Гутсвиллера для следа	445
8.7.1.	Функция отклика хаотической системы	445
8.8.	Анизотропная задача Кеплера	451
8.9.	Диамагнитный водород	456
8.9.1.	Модель	457
8.9.2.	Сечение поглощения	459
8.9.3.	Эксперимент	461
8.9.4.	Квазиклассическое сечение поглощения	462
8.10.	Заключение	466
8.11.	Задачи	467
8.12.	Литература	467
ГЛАВА 9.	Системы с периодической внешней силой	470
9.1.	Введение	470
9.2.	Теория Флоке	472
9.2.1.	Матрица Флоке	472
9.2.2.	Гамильтониан Флоке	474
9.3.	Нелинейные квантовые резонансы	475
9.3.1.	Две простейшие модели с резонансом	476
9.3.2.	Собственные состояния Флоке	478
9.3.3.	Перекрытие квантовых резонансов	480
9.3.4.	Промежутки между ближайшими состояниями Флоке	482
9.4.	Делокализация волновой функции и отталкивание собственных значений	483
9.4.1.	Классическая частица в прямоугольной яме с внешней силой	484
9.4.2.	Квантовая частица в прямоугольной яме с внешним полем	485
9.4.3.	Отталкивание уровней и делокализация	488
9.4.4.	Излучение высших гармоник	490

9.5.	Динамическое туннелирование в экспериментальной атом- ной оптике	492
9.5.1.	Гамильтониан центра масс атома	493
9.5.2.	Усредненный импульс атомов цезия	495
9.5.3.	Анализ Флоке осцилляций при туннелировании	496
9.6.	Квантовая ренормализация	500
9.6.1.	Типовое уравнение Шредингера для системы с двумя резонансами	501
9.6.2.	Резонансы старшего порядка	502
9.6.3.	Отображение квантовой ренормализации	506
9.6.4.	Устойчивое многообразие	507
9.6.5.	Функции масштаба	509
9.6.6.	Масштабирование длины локализации	511
9.7.	Квантовый ротор, помещенный в дельтообразное поле	513
9.7.1.	Уравнение Шредингера для ротора, помещенного в дельтообразное поле	514
9.7.2.	КАМ-поведение квантового ротора, помещенного в дель- тообразное поле	515
9.7.3.	Отображение Флоке	517
9.7.4.	Спектральная статистика	519
9.8.	Динамическая локализация Андерсона: ротор, помещенный в дельтообразное поле	521
9.8.1.	Модель жесткого связывания для ротора, помещенно- го в дельтообразное поле	521
9.8.2.	Коэффициент диффузии и длина локализации	527
9.8.3.	Моделирование атомной оптики с помощью ротора, помещенного в дельтообразное поле	527
9.9.	Атом водорода, возбуждаемый микроволной	531
9.9.1.	Экспериментальная установка	532
9.9.2.	Одномерное приближение	536
9.10.	Динамическая локализация Андерсона — атом водорода, воз- буждаемый микроволной	541
9.10.1.	Диффузия в атоме водорода, возбуждаемого микро- волной	541
9.10.2.	Экспериментальное наблюдение динамической лока- лизации	543
9.11.	Выводы	545
9.12.	Задачи	547
9.13.	Литература	547

ГЛАВА 10. Стохастические проявления хаоса	551
10.1. Введение	551
10.2. Двухмерное броуновское движение	551
10.3. Случайные блуждания в двумерном пространстве	555
10.4. Одномерное броуновское движение под воздействием периодической по времени внешней силы	558
10.4.1. Шрёдингероподобное уравнение	560
10.5. Заключение	563
10.6. Литература	564
Приложение А. Классическая механика	565
А.1. Уравнения Ньютона	565
А.2. Уравнения Лагранжа	565
А.3. Уравнения Гамильтона	567
А.4. Скобки Пуассона	567
А.5. Сохранение объема фазового пространства	568
А.6. Координаты действие-угол	568
А.7. Функция действия	570
А.8. Литература	572
Приложение В. Простые модели	573
В.1. Маятник	573
В.1.1. Колебание — захваченная траектория ($E_0 < g$)	573
В.1.2. Вращение — незахваченная траектория ($E_0 > g$)	576
В.2. Потенциал двойной ямы	577
В.2.1. Захваченное движение ($E_0 < 0$)	577
В.2.2. Незахваченное движение ($E_0 > 0$)	579
В.3. Потенциал бесконечной прямоугольной ямы	580
В.4. Одномерный атом водорода	582
В.4.1. Нулевое поле Штарка	582
В.4.2. Ненулевое поле Штарка	584
Приложение С. Ренормализация интегралов	586
С.1. $\nu = N$ — целое число	586
С.2. $\nu = \frac{N}{M}$ — нецелое число	588
С.3. Литература	590

Приложение D. Скобки Мояла	591
D.1. Функция Вигнера	591
D.2. Упорядочение операторов	593
D.3. Скобки Мояла	595
D.4. Литература	596
Приложение E. Симметрии и гамильтоновы матрицы	597
E.1. Пространственно-временные симметрии	597
E.1.1. Непрерывные симметрии	598
E.1.2. Дискретные симметрии	600
E.2. Структура гамильтоновой матрицы	602
E.2.1. Однородность и изотропность пространства-времени	602
E.2.2. Инвариантность относительно обращения времени	603
E.3. Литература	607
Приложение F. Инвариантные меры	608
F.1. Общее определение инвариантных мер	608
F.1.1. Инвариантная метрика (длина)	608
F.1.2. Инвариантная мера (объем)	609
F.2. Эрмитовы матрицы	609
F.2.1. Вещественные симметричные матрицы	610
F.2.2. Комплексные эрмитовы матрицы	613
F.2.3. Кватернионные матрицы	616
F.2.4. Общая формула инвариантной меры для эрмитовых матриц	618
F.3. Унитарные матрицы	618
F.3.1. Симметричные унитарные матрицы	620
F.3.2. Общие унитарные матрицы	621
F.3.3. Симплектические унитарные матрицы	622
F.3.4. Общая формула инвариантной меры для унитарных матриц	623
F.3.5. Ортогональные матрицы	624
F.4. Литература	625
Приложение G. Кватернионы	626
G.1. Литература	631

Приложение Н. Гауссовы ансамбли	632
Н.1. Определитель Вандермонда	633
Н.2. Гауссов унитарный ансамбль (ГУА)	635
Н.3. Гауссов ортогональный ансамбль (ГОА)	636
Н.4. Гауссов симплектический ансамбль (ГСА)	645
Н.5. Литература	650
Приложение И. Круговые ансамбли	651
И.1. Определитель Вандермонда	652
И.2. Круговой унитарный ансамбль (КУА)	652
И.3. Круговой ортогональный ансамбль (КОА)	654
И.4. Круговой симплектический ансамбль (КСА)	660
И.5. Литература	664
Приложение Ж. Инвариантная мера для унитарных матриц . .	665
Ж.1. Литература	671
Приложение К. Лоренцевы ансамбли	672
К.1. Нормировка ЛОА	672
К.2. Связь между КОА и ЛОА	673
К.3. Эквивалентность КОА и ЛОА при $N \rightarrow \infty$	674
К.4. Инвариантность ЛОА при обращении времени	676
К.5. Робастность ЛОА при интегрировании	676
К.6. Литература	677
Приложение Л. Грассмановы переменные и суперматрицы . . .	678
Л.1. Грассмановы переменные	678
Л.2. Суперматрицы	680
Л.2.1. Транспонирование суперматриц	681
Л.2.2. Эрмитово сопряжение суперматриц	681
Л.2.3. Суперслед суперматриц	681
Л.2.4. Определитель суперматриц	682
Л.3. Литература	684
Приложение М. Функция среднего отклика для гауссова ортого- нального ансамбля	685
М.1. Гауссов интеграл для $(\text{Det}[e\bar{1}_N - \bar{H}_N])^{-1}$	686
М.2. Гауссов интеграл для $\text{Det}[e\bar{1}_N - \bar{H}_N]$	687
М.3. Гауссов интеграл для производящей функции для функции отклика	688

М.4. Математическое ожидание производящей функции (часть 1) .	690
М.5. Преобразование Хаббарда–Стратоновича	692
М.6. Математическое ожидание производящей функции (часть 2) .	694
М.7. Средняя плотность функции отклика	700
М.7.1. Седловые точки при интегрировании по переменной a	702
М.7.2. Седловые точки при интегрировании по переменной w	705
М.7.3. Асимптотика при $N \rightarrow \infty$ для средней плотности функции отклика	707
М.7.4. Полукруговой закон Вигнера	709
М.8. Литература	710
Приложение N. Усреднение S-матрицы для гауссова ортогональ- ного ансамбля	711
N.1. Производящая функция для S -матрицы	711
N.2. Усреднение производящей функции для S -матрицы	712
N.3. Аппроксимация среднего от производящей функции для S - матрицы с помощью седловых точек	715
N.3.1. Случай I: $E/2 < \mu$	716
N.3.2. Случай II: $E/2 > \mu$	717
N.4. Интегрирование по грассмановым переменным	718
N.5. Литература	721
Приложение O. Уравнение Максвелла для двумерных бильярдov	722
O.1. Литература	726
Приложение P. Модель Ллойда	727
P.1. Длина локализации	727
P.2. Литература	732
Приложение Q. Атом водорода в постоянном электрическом поле	733
Q.1. Уравнение Шредингера	733
Q.1.1. Уравнение для относительного движения	733
Q.1.2. Решение при $\lambda_0 = 0$	735
Q.2. Одномерный атом водорода	737
Q.3. Литература	739
Предметный указатель	740